Lezioni del 19-20 ott. 2016 (F. Montefalcone)

0.0.1 Il Numero di Nepero

Definizione 0.0.1. Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ è *monotona crescente* se $a_n \leq a_{n+1}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, *monotona decrescente* se si ha $a_n \geq a_{n+1}$. Si dice che $\{a_n\}$ è *monotona crescente* o *decrescente strettamente* se le disuguaglianze sono strette "$<$" o "$>$".

Notazione. $a_n \nearrow$ oppure $a_n \searrow$ indica che a_n è monotona crescente oppure monotona decrescente.

Teorema 0.0.1. *Ogni successione monotona ha limite.*
In effetti si ha:

1) $a_n \nearrow \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$

2) $a_n \searrow \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$

Esempio 1 (Numero di Nepero: $e = 2.718281828459045235360287471352662 49...$)**.**
Per definizione, poniamo

$$e \overset{def.}{\equiv} \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Si dimostra che $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ sono successioni convergenti che hanno stesso limite (cioè e). Inoltre si vede che sono monotone, si ha:

$$a_n < a_{n+1} \quad \text{e} \quad b_n > b_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Dato che $a_n < b_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ segue che

$$a_n \leq a_p \lneq b_p \leq b_m \quad \forall\, n, m,\ \text{dove } p = \max\{n, m\}.$$

Da ciò a_n converge perché monotona $\nearrow$ e superiormente limitata e b_n converge perché monotona $\searrow$ ed inferiormente limitata.

Infine

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1;$$

da ciò segue

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n \overset{def.}{=} e.$$

Osservazione 0.0.1. Ad esempio, vediamo $a_n \nearrow$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} \overset{D.\,Bernoulli}{\geq} \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \cdot \frac{n+2}{n+1} =$$

$$= \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1.$$

Ossia $\forall\, n \in \mathbb{N}$ si ha: $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad (\Longrightarrow\ a_{n+1} > a_n \quad \forall\, n)$.

(L'altra è simile: provate $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1 \quad \forall\, n$).

Osservare che $a_n \nearrow$, $b_n \searrow$ si dimostra usando la disuguaglianza seguente:

$$(1+x)^n \geq 1 + n\,x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},\ x > -1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \qquad (\textit{Disuguaglianza di Bernoulli})$$

Esercizio 0.0.1. Dimostrare la *Disuguaglianza di Bernoulli* per induzione.

Limiti unilaterali: limite destro e limite sinistro

Si definiscono il *limite a destra* (ds.) ed il *limite a sinistra* (sn.) ponendo

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lambda \iff$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : (x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - \lambda| < \varepsilon)\,,$$

oppure

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lambda \iff$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : (x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - \lambda| < \varepsilon)\,.$$

Ovviamente si ha:
se f ha limite in un punto, allora f ha ivi il limite destro ed il limite sinistro.

Non è vero il viceversa come mostrano i seguenti:

Esempi:

1. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\qquad f(x) \overset{def.}{=} \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

   Si ha:
   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \neq 0 \neq \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1.$$
   Pertanto $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$.

2. Sia $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) \overset{def.}{=} \dfrac{1}{x}$. Si ha:
   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty.$$
   Pertanto $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$.

3. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\qquad f(x) \overset{def.}{=} \begin{cases} 1 + x^2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 - x^2 & x < 0 \end{cases}$

   Si ha:
   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \neq 0 \neq \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1.$$
   Pertanto $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$.

Limite di funzioni monotone:

Definizione 0.0.2. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$. Allora f è *monotona crescente* se $f(x) \leq f(y)$ $\forall\, x, y \in A$, $x \leq y$. Si dice che f è *monotona strettamente crescente* se $f(x) < f(y)$ $\forall\, x, y \in A$, $x < y$.
(*decrescente* è la stessa cosa ma *con le disuguaglianze "invertite"*).

Si usano spesso le notazioni: $f \nearrow$ (f *crescente*) oppure $f \searrow$ (f *decrescente*).

Teorema 0.0.2 (Limite per le funzioni monotone)**.** *Sia*

$$f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \ \mathbb{R}$$

monotona ($f \nearrow$ oppure $f \searrow$). Allora valgono le seguenti:

1) $\forall\ x_0 \in]a, b[\ \exists\ \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ *e* $\exists\ \lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

2) $\exists\ \lim_{x \to a^+} f(x)$ *e* $\exists\ \lim_{x \to b^-} f(x)$.

Più precisamente, se $f \nearrow$ si ha:

1) $\forall\ x_0 \in]a, b[$ *si ha*

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x \in [a, x_0[} f(x) \qquad \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{]x_0, b]} f(x)$$

2) $\exists\ \lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_{]a,b]} f(x)$ *e* $\exists\ \lim_{x \to b^-} f(x) = \sup_{[a,b[} f(x)$.

Se $f \searrow$ si ha:

1) $\forall\ x_0 \in]a, b[$ *si ha*

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \inf_{x \in [a, x_0[} f(x) \qquad \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \sup_{]x_0, b]} f(x)$$

2) $\exists\ \lim_{x \to a^+} f(x) = \sup_{]a,b]} f(x)$ *e* $\exists\ \lim_{x \to b^-} f(x) = \inf_{[a,b[} f(x)$.

Osservazione 0.0.2. Si osservi che se $f \nearrow$ allora per ogni $x_0 \in]a, b[$ si ha:

$$f(a) \leq \lim_{x \to a^+} f(x) \leq \lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x) \leq \lim_{x \to b^-} f(x) \leq f(b).$$

(Se $f \searrow$ valgono con "$\leq$" opposte).

Consiglio: "ragionare", con esempi e/o disegni, sul significato "pratico" del teorema.

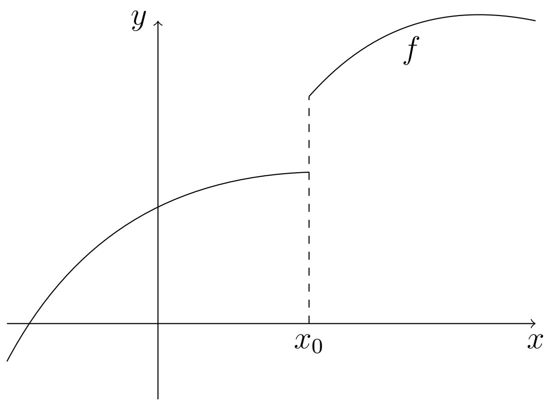


Figura 1

Esempi:

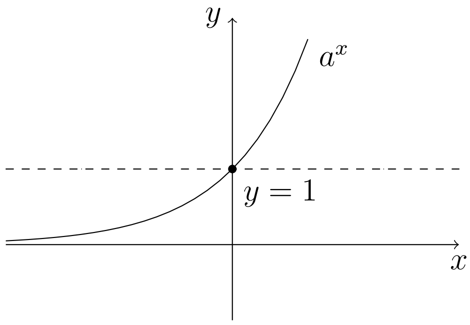
1. Funzioni esponenziali: sono funzioni monotone strettamente crescenti o decrescenti, a seconda che $a \in]1, +\infty[$ od $a \in]0, 1[$; vedere figure a pagina seguente.

2. Logaritmi: sono funzioni monotone strettamente crescenti o decrescenti, a seconda che $a \in]1, +\infty[$ od $a \in]0, 1[$; vedere figure a pagina seguente.

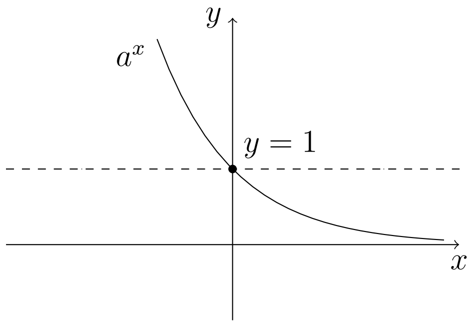
3. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\qquad f(x) \overset{def.}{=} \begin{cases} 1 + x^2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}.$

   Questa funzione è monotona crescente, ma non strettamente, dato che a sinistra di $x = 0$ è costante.

4. $f(x) = \arctan(x)$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$.

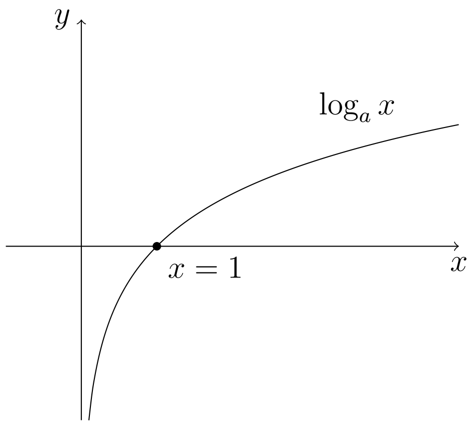


(a) se $a > 1$

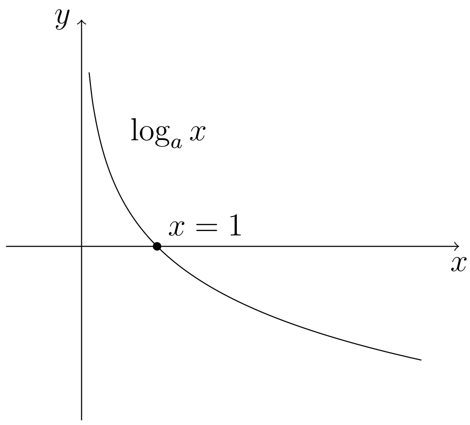


(b) se $a \in]0, 1[$

Figura 2: Grafici della funzione esponenziale a^x



(a) se $a > 1$



(b) se $a \in]0, 1[$

Figura 3: Grafici della funzione logaritmica $\log_a x$

Altri Limiti notevoli e Scala degli infiniti

Lo studio effettuato sul numero di Nepero porta come semplici corollari i seguenti ulteriori “limiti notevoli”:

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}$ si ha
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

2. $\forall\, x \in \mathbb{R}$ e $\forall\,\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tale che $a_n \to \pm\infty$ si ha
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n} = e^x.$$

Osservazione 1. Siano $b > 0$, $a > 1$. Le seguenti successioni tendono a $+\infty$ e sono ordinate in senso crescente (in altre parole, ognuna di esse tende a $+\infty$ “meno rapidamente” della successiva):
$$\log n, \quad , n^b, \quad a^n, \quad n!, \quad n^n.$$

Il confronto tra le prime tre verrà studiato in seguito mediante il Teorema dell'Hôpital. Gli altri confronti si possono studiare usando il **Criterio del Rapporto** (esercizio svolto in classe).

Riepilogo esercizi svolti in classe e/o proposti

Induzione e limiti “semplici”

Esercizio 0.0.2. *Dimostrare che* $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} \to e^2$ *per* $n \to +\infty$.

Esercizio 0.0.3. *Dimostrare che* $\frac{2+\cos n}{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)} \to +\infty$ *per* $n \to +\infty$.

Esercizio 0.0.4. *Dimostrare che*
$$\cos(n)\left[\log(\sqrt{n}-1)-\sqrt{n-1}\right] \to 0$$
per $n \to +\infty$.

Esercizio 0.0.5. *Dimostrare che* $n^n - 2^n \to +\infty$ *per* $n \to +\infty$.

Esercizio 0.0.6. *Dimostrare (per induzione) la disuguaglianza:*

$$\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Dedurne che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Suggerimento:
usare il fatto che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è monotona strettamante crescente (vedere appunti precedenti sul numero di Nepero).
In particolare, si ha $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2\,\forall\, n \in \mathbb{N}$. Il limite segue dalla disuguaglianza usando il Teorema del Confronto (anche detto dei due Carabinieri).

Inf, Sup, Min, Max.

Esercizio 0.0.7. *Studiare* $\inf / \sup$ *e* $\min / \max$ *dell'insieme*

$$A = \left\{ \frac{n^2-1}{3n^2} + \frac{2}{3} : n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

Risposta: $\sup A = 1$; $\nexists \max A$. Inoltre $\inf A = \min A = \frac{2}{3}$.
Suggerimento: dimostrare prima la monotonia di $a_n := \frac{n^2-1}{3n^2}$.

Limiti

Esercizio 0.0.8. *Calcolare, se esiste, il seguente limite:*

$$L \equiv \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n^{2n}+3^n}.\sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) + n\arccos\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt[3]{n^5+n^2+1} - 2\sqrt[3]{n^5}}.$$

Risposta: $\exists\, L = -1$.
Suggerimento: usare il limite notevole $\sin(x)/x \to 1$ per $x \to 0$.

Esercizio 0.0.9. *Calcolare, se esiste, il seguente limite:*

$$L \equiv \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2^n+7^n} + n\cos\left(n^n\right)}{5^n + \sqrt{n^2+4}}.$$

Risposta: $\exists\, L = 0$.
Suggerimento:
notare che $\cos(x)$ è una funzione limitata (dai valori ± 1). Usare inoltre i limiti notevoli: (1) $a \in]0,1[\Rightarrow a^n \to 0$ per $x \to 0$;
(2) $a > 1$ e $b \in \mathbb{R} \Rightarrow n^b/a^n \to 0$ per $n \to +\infty$.

Esercizio 0.0.10. *Calcolare, se esiste, il seguente limite:*

$$L \equiv \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(2^n + 5^n) - \sqrt{n^2+1}}{(\sqrt{n} + \sqrt[4]{n})(\log n)^2}.$$

Risposta: $\exists\, L = +\infty$.
Suggerimento: Usare i limiti notevoli: (1) $a \in]0,1[\Rightarrow a^n \to 0$ per $n \to +\infty$; (2) $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R} \Rightarrow n^a/\log^b(n) \to 0$ per $n \to +\infty$.

Esercizio 0.0.11. *Calcolare, se esiste, il seguente limite:*

$$L \equiv \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(e^n - e^{-n}) + \frac{\sin n}{n} + \arctan(n)}{n^2(\sqrt{n^4+4n} - n^2)}.$$

Risposta: $\exists\, L = \frac{1}{2}$.
Suggerimento:
Usare le proprietà delle funzioni logaritmo, arcotangente e seno: notare, ad esempio, che $\sin(x)$ è limitata.
Inoltre, può essere utile razionalizzare il denominatore
(N.B. Ricordare che $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$ per ogni $A, B \in \mathbb{R}_+$).

Esercizio 0.0.12. *Calcolare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste il seguente limite:*

$$L \equiv \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(e^n - e^{-n}) + \frac{\sin n}{n} + \arctan(n)}{n^\alpha(\sqrt{n^4+4n} - n^2)}.$$

Risposta: L esiste sempre. Inoltre si ha: $L = \frac{1}{2}$ se $\alpha = 2$, $L = 0$ se $\alpha > 2$, ed infine $L = +\infty$ se $\alpha < 2$.
Suggerimento: vedere esercizio precedente.

Osservazione 0.0.3 (Teoremi di Cèsaro)**.** Valgono le seguenti due importanti proposizioni: *Sia $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una successione a termini non-negativi (ossia $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$). Allora*

1. *se $\exists \lim_{n\to+\infty}(a_{n+1} - a_n) = L$ $(\in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$ allora $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = L$.*

2. *se $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $(\in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$ allora $\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.*

Esercizio 0.0.13. *Verificare che*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty; \tag{1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e. \tag{2}$$

Suggerimento: Preliminarmente, usare che $y = e^{\log y}$ per ogni $y > 0$. Applicare poi l'osservazione precedente (ossia, nel primo la (1) e nel secondo la (2)).

Continuità e limiti unilaterali

Nei seguenti esercizi analizzeremo la continuità in 0 di alcune funzioni, al variare di parametri reali.
Notare che, fuori da 0 tali funzioni sono SEMPRE continue in quanto sono somme e/o prodotti e/o composizioni di funzioni continue.

Esercizio 0.0.14. *Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}_+$, la continuità della seguente funzione*

$$f(x) := \begin{cases} \frac{|x|^\alpha}{\sin(x)} + \frac{1+\sin(x)}{e^{\frac{1}{x}}+1} & x \in]-\pi, 0[\\ 0 & x = 0 \\ \sin\left(\beta^{\frac{1}{x}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{x^\beta}\right) - \frac{\pi}{2} & x > 0 \end{cases}.$$

Risposta: $f(x) \in C(]-\pi, +\infty[)$ se e solo se $\alpha = 1$ e $\beta > 1$.
Svolto in dettaglio in classe.

Esercizio 0.0.15. *Studiare, al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la continuità della seguente funzione*

$$f(x) := \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) + \frac{2^{-\frac{1}{x}}}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ \beta \arccos(x) & x \in [-1\, 0[\end{cases}.$$

Risposta: $f(x) \in C([-1, +\infty[)$ se e solo se $\alpha < 0$ e $\beta > \frac{2}{\pi}$.
Soluzione: Si ha $\alpha < 0 \Rightarrow \frac{1}{x^\alpha} \to 0$ per $x \to 0^+$. Allora, usando il limite notevole $\sin x/x \to 1$ per $x \to 0$, si ottiene facilmente che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ se e solo se $\alpha < 0$. [Tenere conto che $\frac{2^{-\frac{1}{x}}}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} \to 0$ per $x \to 0^+$ e che non è una forma indeterminata, essendo prodotto di funzioni infinitesime.] A sinistra di 0 si ha invece è evidente che $f(x) \to \beta \cdot \frac{\pi}{2}$. Dunque f può essere continua in 0 solo se $\beta = \frac{2}{\pi}$.

Esercizio 0.0.16. *Studiare, al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la continuità della seguente funzione*

$$f(x) := \begin{cases} |x|^{\frac{\sin(\beta x)}{x}} - \arccos(|x| - 1) & x \in [-2, 0[\\ -\pi & x = 0 \\ \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{x}\right)}{\log\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)} + \arctan\left(\frac{\alpha}{x}\right) - \frac{\pi}{2} & x > 0 \end{cases}.$$

Risposta: $f(x) \in C([-2,+\infty[)$ se e solo se $\alpha < 0$ e $\beta > 0$.
Soluzione: Notare che

$$\frac{\sin(\beta x)}{x} = \beta \frac{\sin(\beta x)}{\beta x} \to \beta \qquad (x \to 0)$$

per ogni $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Inoltre, se $\beta = 0$ si ha $\sin(\beta x) = 0$. Da questo segue facilmente che

$$|x|^{\frac{\sin(\beta x)}{x}} \to \begin{cases} +\infty & \beta < 0 \\ 1 & \beta = 0 \\ 0 & \beta > 0 \end{cases}$$

per $x \to 0^-$. Allora, dato che $\arccos(-1) = \pi$, si ottiene che

$$f(x) \to \begin{cases} +\infty & \beta < 0 \\ 1 - \pi & \beta = -\pi \\ 0 & \beta > 0 \end{cases}$$

per $x \to 0^-$. Ne segue la continuità a sinistra di 0, per ogni $\beta > 0$.

A destra di 0, invece, si vede subito che $e^{\frac{1}{x}} \to +\infty$ per $x \to 0^+$. Questo implica che $\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{x}\right)}{\log\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)} \to 0$ per $x \to 0^+$. Inoltre che $\arctan\left(\frac{\alpha}{x}\right)$ tende a $\pi/2$ se $\alpha > 0$, mentre tende a $-\pi/2$ se $\alpha < 0$, per $x \to 0^+$; inoltre è 0, se $\alpha = 0$. Ne segue che

$$f(x) \to \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \alpha = 0 \\ -\pi & \alpha < 0 \end{cases}$$

per $x \to 0^+$. Pertanto, deve essere $\alpha < 0$. Questo è quello che si doveva dimostrare.