Lezioni del 3-16-17 novembre 2016 (Prof. F. Montefalcone)

0.0.1 3/11/2016 – Studi di Funzione

Esercizio 0.0.1. Sia

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x}{|x|}\sqrt{(4-x)(x+2)} & \text{se } x \in [-2,4] \\ 5 & \text{se } x = 0 \end{cases} .$$

Studiare continuità, derivabilità e monotonia di f. Abbozzarne il grafico. Si può applicare il Teorema di Weierstrass alla funzione f? Perché?

Esercizio 0.0.2. Sia

$$f(x) := \begin{cases} \frac{4-3|x|}{x^2+1} & \text{se } x \geq -1,\ x \neq 3 \\ 5 & \text{se } \ x = 3 \\ \frac{1}{2x^4} & \text{se } x < -1 \end{cases} .$$

Studiare i punti di non derivabilità; ricercare i punti di massimo/minimo relativo e assoluto; studiare gli eventuali asintoti; abbozzare il grafico di f.

Esercizio 0.0.3. Sia

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{x^2 + |1-2x|} & \text{se } x \geq -1 \\ \sqrt{3-x} & \text{se } \ x < -1 \end{cases} .$$

Studiare i punti di non derivabilità; ricercare inoltre i punti di massimo/minimo relativo e assoluto; studiare gli eventuali asintoti; abbozzare il grafico di f (non si studi la f'').

Esercizio 0.0.4. Sia $f(x) = \arctan(1/x) - 2x + 3$, definita in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Se ne studi la monotonia e si deduca se vale in $[3, +\infty)$ che $\arctan(1/x) < 2x - 3$. Sfruttando i teoremi sulle funzioni continue, dire quanti zeri ha f in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ed individuare un intervallo di appartenenza di tali zeri.
N.B. Si ricordi il codominio di $\arctan t$.

Esercizio 0.0.5. Sia $f(x) := \sqrt{x^2+1} - \sqrt{|x^2-1|}$. Dire se f ammette max e min assoluti nel suo insieme di definizione, e in caso affermativo calcolarli. Trovare, se esistono, i punti di max e min relativi.

0.0.2 16/11/2016 – Due metodi per approssimare le soluzioni di un'equazione $f(x) = 0$

Abbiamo già trattato, in precedenza, il seguente importante *Teorema di Bolzano*:

Teorema 0.0.1 (Bolzano)**.** *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *e sia* $f \in C([a,b])$ *(cioè* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua) tale che* $f(a) \cdot f(b) \leq 0$.
Allora $\exists\, x_0 \in [a,b]$ *tale che* $f(x_0) = 0$.

Si noti che f può avere più di uno "zero" in $[a,b]$: per semplicità, nel seguito supponiamo che esso sia unico.

La seguente dimostrazione, che è costruttiva, è basata su di un metodo che consente di "approssimare" la soluzione dell'equzione $f(x) = 0$ in $[a,b]$. Questo metodo è detto *metodo di bisezione.* (Si osservi che la stessa dimostrazione funziona indipendentemente dal fatto che vi sia un'unica soluzione in $[a,b]$).

Dimostrazione: Metodo di Bisezione. Sia $c = \dfrac{a+b}{2}$, cioè il "punto medio" di $[a,b]$. Deve essere $f(a) \cdot f(c) \leq 0$ oppure $f(b) \cdot f(c) \leq 0$ (perché altrimenti se fosse $f(a) \cdot f(b) > 0$ e $f(b) \cdot f(c) > 0$ necessariamente sarebbe violata l'ipotesi $f(a) \cdot f(b) \leq 0$).
Nel primo caso si pone $a_1 = a$, $b_1 = c$; nel secondo caso si pone $a_1 = c$, $b_1 = b$. Come conseguenza si ha:

$$a \leq a_1 \leq b_1 \leq b, \quad f(a_1) \cdot f(b_1) \leq 0, \quad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}.$$

Sia ora $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$. Si ragiona come sopra e pertanto $f(a_1) \cdot f(c_1) \leq 0$ o $f(c_1) \cdot f(b_1) \leq 0$. Nel primo caso si pone $a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$; nel secondo caso si pone $a_2 = c_1$, $b_2 = b_1$. Pertanto

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_1, \quad f(a_2) \cdot f(b_2) \leq 0 \quad \text{e} \quad b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2} = \frac{b-a}{4}.$$

Quello descritto adesso, in effetti, è un metodo che si può iterare.

Si noti che, ad ogni passo del metodo descritto, o si trova uno zero di f (ossia, il punto media dell'intervallo considerato) oppure restano definite due successioni $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq [a,b]$ tali che

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n, \quad f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0 \quad \text{e} \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Le successioni sono monotone e limitate. Pertanto convergono. Dato che

$$\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{2^n} = 0,$$

si ha $\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n \overset{def.}{=} x_0 \in [a,b]$. Dato che f è continua $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)\cdot f(b_n) = (f(x_0))^2$. Ma deve essere $f^2(x_0) \le 0$ visto che $f(a_n)\cdot f(b_n) \le 0$ cioè $f(x_0) = 0$. □

Un altro metodo, molto noto, è il *metodo di Newton,* detto anche *delle tangenti.* D'ora in poi assumiamo quanto segue:

- $f \in C'([a,b])$, $f(a)\cdot f(b) < 0$, f convessa e $f'(x) > 0\ \forall\, x \in [a,b]$.

Osservazione. Queste ipotesi possono indebolirsi di molto. Inoltre, si osservi che, a patto di semplici modifiche, la convessità si può rimpiazzare con la concavità e l'ipotesi $f'(x) > 0\ \forall\, x \in [a,b]$ con quella $f'(x) < 0\ \forall\, x \in [a,b]$. Ovviamente, con le ipotesi fatte, esiste uno ed un solo $x_0 \in]a,b[$ tale che $f(x_0) = 0$.

Descriviamo il metodo:

- Sia $x_1 \in]x_0, b]$. Si consideri il punto $P_1 = (x_1, f(x_1)) \in \mathrm{graf}(f)$.

- La retta tangente al grafico di f e passante per P_1 ha equazione cartesiana

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1).$$

- Evidentemente, si ha che tale retta interseca l'asse delle ascisse nel punto

$$x_2 := x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

(basta porre $y = 0$ nell'equazione precedente, e risolvere in x).

- Per ipotesi, f è convessa e quindi si ha

$$f(x) \ge f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

Dalla disuguaglianza di convessità segue, in particolare, che

$$f(x_2) \ge f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) = 0,$$

ossia che $f(x_2) \ge 0$. Ciò significa necessariamente che $x_2 \ge x_0$.

In effetti, quanto descritto sopra, si può iterare. Si ottiene in tal modo una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ricorrenza come segue:

$$x_1 := b, \quad x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Proposizione 0.0.1. *Nelle notazioni precedenti, si ha:*

$$\exists!\, x_0 \in]a,b[: \; f(x_0) = 0 \quad e \quad x_0 = \lim_{n\to+\infty} x_n.$$

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione che si ha sempre:

- $x_n \geq x_0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Il primo passo dell'induzione è vero, dato che $x_1 = b > x_0$, per ipotesi (essendo $x_0 \in]a,b[$). Assumiamo vero il passo n-esimo. Dobbiamo quindi verificare che $x_{n+1} \geq x_0$ (assumendo che $x_n \geq x_0$). Per la convessità, si ha

$$f(x_{n+1}) \geq f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0,$$

ossia $x_{n+1} \geq x_0$ (infatti, $f > 0$ in $]x_0, b]$ e $f < 0$ in $[a, x_0[$. Pertanto, si ottiene $x_{n+1} \in]x_0, b]$). Questo prova la precedente affermazione.

Si ha inoltre:

- $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona decrescente (ossia, $x_n \searrow$).

Infatti, come già osservato, se $x_n \geq x_0$ allora $f(x_n) \geq 0$. Quindi

$$x_{n+1} = x_n - \underbrace{\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{\geq 0} \leq x_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dunque, essendo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione monotona e limitata, si deduce che esiste $x^* = \lim_{n\to+\infty} x_n \in [x_0, b]$. In conclusione, si ha

$$x^* = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)} \Longleftrightarrow f(x^*) = 0.$$

Per l'ipotesi fatta (di unicità della soluzione di $f(x) = 0$ in $[a,b]$), dev'essere $x^* = x_0$. Questo conclude la dimostrazione.

□

Esercizio 0.0.6 (Facoltativo)**.** Si cerchi di applicare i due metodi visti ad un esempio concreto. Fornirsi preliminarmente di calcolatrice. Si consideri ad esempio, la funzione

$$f(x) = x^3 + 2x - 1$$

in $[0,1]$.

Si cerchi di approssimare, con precisione crescente (ad es., con $1, 2, 3, ...$ cifre decimali), la soluzione dell'equazione $f(x) = 0$.

0.0.3 16 & 17/11/2016– Limiti

Esercizio 0.0.7. *Calcolare, se esiste, il seguente limite:*

$$L \equiv \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(2x+3x^2)+3\sin x+\operatorname{ch} x-\cos x}{(\operatorname{sh} x)(\tan x)+\arctan(1-\cos x)} \qquad \left(=\lim_{x\to 0} f(x)\right).$$

Risposta: non esiste $L \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. In effetti, si ha che $\exists$ il lim ds. $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$; inoltre $\exists$ il lim sn. $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$.

Esercizio 0.0.8. *Calcolare, se esiste, il seguente limite:*

$$L \equiv \lim_{x\to+\infty} \frac{(\operatorname{ch} x)^x+\operatorname{sgn} x+x^x}{(\operatorname{sh} x)^{x^3}+(\arctan x)^{\frac{1}{x}}+e^{x^2}}.$$

Risposta: esiste $L=0$.

Esercizio 0.0.9. *Calcolare, se esiste, il seguente limite:*

$$L \equiv \lim_{x\to+\infty} \frac{(\operatorname{ch} x)^x+\operatorname{sgn} x+x^x}{(\operatorname{sh} x)^{x^3}+(\arctan x)^{\frac{1}{x}}+e^{x^2}}.$$

Risposta: esiste $L=0$.

Esercizio 0.0.10. *Calcolare, se esiste, il seguente limite:*

$$L \equiv \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\frac{1}{|x|}\right)^{x^3}+\arctan(\sqrt{1+x^2})+\cos(1+x^2)}{3^{x^2}-2^{\sqrt{1+x^2}}}.$$

Risposta: esiste $L=+\infty$.

Esercizio 0.0.11. *Calcolare, se esiste, il seguente limite:*

$$L \equiv \lim_{x\to 0^+} \frac{2\log(1+x^2)+\log(\cos^2 x)+\sqrt{1-\cos x}}{(\arctan x)(\operatorname{sh} x)+\tan x+x^2}.$$

Risposta: esiste $L=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 0.0.12. *Calcolare per quali* $\alpha \in \mathbb{R}$ *esiste il seguente limite:*

$$L \equiv \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\sin(x^2)} - e^{x^\alpha}}{\log(1+\sqrt{x}) + 2\cos(\sqrt[4]{x}) - 2}.$$

Risposta: L esiste sempre. Inoltre si ha: $L = 0$ se $\alpha > 2$, $L = 0$ se $\alpha = 2$, ed infine, se $\alpha \in]0,2[$ si hanno tre casi: $L = +\infty$ se $\alpha \in]0,1[$; $L = 0$ se $\alpha \in]1,2[$ e $L = \frac{12}{5}$ se $\alpha = 1$.

Esercizio 0.0.13. *Calcolare per quali* $\alpha \in \mathbb{R}$ *esiste il seguente limite:*

$$L \equiv \lim_{x \to +\infty} \frac{xe^x - e^{2\sqrt{1+x^2}}}{e^{\alpha x} + x^\alpha}.$$

Risposta: L esiste sempre. Inoltre si ha: $L = -\infty$ se $\alpha < 2$, $L = -1$ se $\alpha = 2$, ed infine $L = 0$ se $\alpha > 2$.