Lezione del 24 nov. 2016 (F. Montefalcone)

0.0.1 Integrale Indefinito

VEDERE ALTRO ALLEGATO (Documento PDF)

La prossima sezione contiene tutta la teoria che lega insieme i concetti di derivata e integrale definito. La prima parte della teoria, che riporto per completezza, è stata svolta dalla Prof. Bernardi. Oggi, in classe, abbiamo invece trattato due corollari importanti: le formule di sostituzione e d'integrazione per parti nell'integrale definito.
L'ultima sezione contiene gli esempi svolti in classe.

0.0.2 Derivazione ed integrazione: primitive, integrazione per parti e per sostituzione

Teorema 0.0.1 (1° Teorema fondamentale del calcolo integrale)**.** *Sia* $f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$*. Posto* $I_f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$*,*

$$I_f(x) \overset{def.}{=} \int_a^x f(t)\, dt,$$

si ha

(1) I_f *è continua su* $[a,b]$

(2) *Se* f *è continua in* $x_0 \in [a,b]$ *allora* I_f *è derivabile in* x_0 *e si ha*

$$\frac{d}{dx} I_f(x_0) = f(x_0).$$

Osservazione 0.0.1. Prima di dimostrare il teorema, notare che: vuol dire che la derivata in ogni punto x_0 interno ad $[a,b]$ della funzione I_f (I_f è detta *funzione integrale di* f *su* $[a,b]$ *relativa al punto iniziale* a) esiste in ogni punto x_0 in cui f è continua e tale derivata coincide col valore di f in x_0, cioè $f(x_0)$.

Dimostrazione. Sia $x_0 \in [a,b]$ e sia $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $x_0 + h \in [a,b]$. Allora

$$I_f(x_0+h) - I_f(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)\, dt - \int_a^{x_0} f(t)\, dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\, dt = \mu(h) \cdot h$$

dove $\mu(h)$ è, per h fissato, il valor medio dato dal Teorema della Media Integrale. Allora

$$\mu(h) = \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt}{h}$$

e ne segue inoltre

$$\inf_{]x_0,x_0+h[} f \leq \mu(h) \leq \sup_{]x_0,x_0+h[} f$$

In particolare

$$\lim_{h\to 0} \left(I_f(x_0+h) - I_f(x_0)\right) = 0.$$

Ciò prova (1). Sia x_0 un punto in cui la funzione f è continua. Allora, per definizione: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \rho > 0$ tale che $\forall\, x \in [a,b]$ se $|x - x_0| < \rho$ si ha

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Quindi

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \quad \forall\, x \in \,]x_0, x_0+h[\quad \text{se} \quad |h| < \rho.$$

In questo caso, cioè se $|h| < \rho$ si ha

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \mu(h) \leq f(x_0) + \varepsilon.$$

Allora $\lim\limits_{h\to 0} \mu(h) = f(x_0)$. Questo conclude la dimostrazione dato che

$$\mu(h) = \frac{I_f(x_0+h) - I_f(x_0)}{h}.$$

$\square$

Corollario 0.0.1. *Se* $f \in C([a,b])$ *allora* I_f *è derivabile su* $[a,b]$ *e*

$$\frac{d}{dx} I_f(x) = f(x) \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Corollario 0.0.2. *Se* $f \in C([a,b])$ *ed* $x_0 \in [a,b]$. *Posto*

$$G\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \quad G(x) \overset{def.}{=} \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt,$$

risulta

$$G'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Dimostrazione. Si ha:

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \underbrace{\int_{x_0}^{a} f(t)\,dt}_{=C} + \int_{a}^{x} f(t)\,dt = C + I_f(x) \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Ne segue subito la tesi. □

Definizione 0.0.1. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Una *primitiva* di f è una funzione $\phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che $\phi'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$.

Osservazione 0.0.2. Il Corollario 0.0.2 dice che ogni funzione continua ha (almeno) una primitiva. Ma se ϕ è una primitiva, anche $\phi + C$ è una primitiva di $f \quad \forall\, C \in \mathbb{R}$.
Inoltre, pertanto, se ϕ_1 e ϕ_2 sono primitive di f, allora $\phi_1 - \phi_2 =$ costante. (Ciò segue dal teorema che dice che se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è tale che $f'(x) = 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$ allora f è costante su $[a,b]$).

Teorema 0.0.2 (2° Teorema fondamentale del calcolo integrale)**.**
Sia $f \in C([a,b])$ e sia ϕ una primitiva di f su $[a,b]$. Allora

$$\int_a^b f(t)\,dt = \phi(b) - \phi(a).$$

Notazione. Si scrive anche $\phi\big|_a^b$ per dire $\phi\big|_a^b \stackrel{def.}{=} \phi(b) - \phi(a)$.

Dimostrazione. Segue dal teorema fondamentale (ossia, per meglio dire, dal Corollario 0.0.1) che $I_f(x)$ è una primitiva di f. L'osservazione precedente dice che $\exists\, C \in \mathbb{R}$ tale che $I_f(x) = \phi(x) + C \quad \forall\, x \in [a,b]$. Pertanto

$$\int_a^b f(x)\,dx = I_f(b) = I_f(b) - \underbrace{I_f(a)}_{=0} = (\phi(b) + C) - (\phi(a) + C) = \phi(b) - \phi(a).$$

□

Teorema 0.0.3 (Integrazione per parti)**.** *Sia $f \in C([a,b])$ e sia $g \in C^1([a,b])$. Sia F una primitiva di f. Allora*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = F(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)\,g'(x)\,dx.$$

Dimostrazione. Poiché $Fg \in C^1([a,b])$ si ha per il 2° Teorema fondamentale del calcolo

$$\begin{aligned} F(x)\,g(x)\Big|_a^b &= \int_a^b (F(x)\,g(x))'\,dx = \int_a^b (F'(x)\,g(x) + F(x)\,g'(x))\,dx = \\ &= \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b F(x)\,g'(x)\,dx. \end{aligned}$$

Segue la tesi. □

Teorema 0.0.4 (Integrazione per sostituzione)**.** *Sia $f \in C([a,b])$ e sia $\varphi\colon [\alpha,\beta] \xrightarrow[1-1]{su} [a,b]$, una biiezione. Se $\varphi \in C^1([\alpha,\beta])$ allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Dimostrazione. Posto

$$\begin{aligned} F&\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_a^{\varphi(t)} f(x)\,dx \\ G&\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}, \quad G(t) = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{t} f(\varphi(s))\,\varphi'(s)\,ds \end{aligned}$$

dal 1° Teorema fondamentale del calcolo si ha $F \in C^1([\alpha,\beta])$, $G \in C^1([\alpha,\beta])$ e

$$F'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t) = G'(t) \quad \forall\, t \in [\alpha,\beta].$$

Ne segue che $F - G$ è costante su $[\alpha,\beta]$. Poiché inoltre

$$F(\varphi^{-1}(a)) = 0 = G(\varphi^{-1}(a)).$$

Quindi $F = G$ su $[\alpha,\beta]$. Segue

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(\varphi^{-1}(b)) = G(\varphi^{-1}(b)) = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

□

0.0.3 Integrali indefiniti svolti integrando per parti

Nel seguito, $C \in \mathbb{R}$ denoterà un'arbitraria costante reale.

- Si ha:
$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int Dx \sin x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

- Si ha
$$I \;\; := \;\; \int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \int Dx^2 \sin x dx = x \sin x - 2 \int x \sin x dx.$$
Inoltre $\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = \sin x - x \cos x + C$. Pertanto $I = x^2 \sin x - 2(\sin x - x \cos x) + C$.

- Si ha
$$\begin{aligned} \textstyle\int \log x dx = \int 1 \cdot \log x dx = \int Dx \cdot \log x dx = x \log x - \int \frac{x}{x} dx \\ = x \log x - \textstyle\int dx = x \log x - x + C = x(\log x - 1) + C. \end{aligned}$$
La stessa tecnica si usa anche, ad esempio, per gli integrali $\int \arctan x dx$, $\int \arcsin x dx$, etc..

- Si ha
$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = e^x (x-1) + C.$$
Iterando la stessa tecnica, si può risolvere, ad esempio, $\int x^n e^x dx$ ($n \in \mathbb{N}$).

- Si ha
$$I := \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \underbrace{\int e^x \cos x dx}_{=:I_1}.$$
Inoltre
$$I_1 = e^x \sin x - \underbrace{\int e^x \sin x dx}_{=I}.$$
Pertanto, si ottiene $2I = e^x(\sin x - \cos x) + \tilde{C}$ ($\tilde{C} \in \mathbb{R}$), ossia
$$I = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

La stessa tecnica di questo esercizio si applica ai seguenti:

$$\int (\operatorname{sh} x)^2 dx, \quad \int (\operatorname{ch} x)^2 dx, \quad \int (\sin x)^2 dx, \quad \int (\cos x)^2 dx.$$

In tutti questi, occorre usare la relazione fondamantale delle funzioni iperboliche:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

(In classe abbiamo svolto solo il primo: gli altri sono per esercizio.)