Lezioni del 30 novembre e 1 dicembre 2016 (F. Montefalcone)

0.0.1 Infinitesimi, O e o ("O grande" e "o piccolo")

Nel seguito servirà una nuova nozione: quella di O grande. Per completezza didattica, riporto anche la definizione di o piccolo, che avete già studiato.

Ricordo che $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e che $D(A)$ denota l'insieme dei punti di accumulazione di $A \subset \mathbb{R}$.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A) \cap \overline{\mathbb{R}}$ e siano $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ con $g(x) \neq 0$ se $x \in A \setminus \{x_0\}$.

Definizione 0.0.1 (O grande)**.** Si dice che f *è un "O grande" di g per $x \to x_0$*, in tal caso si pone

$$f = O(g) \quad \text{per } x \to x_0,$$

se $\exists\, M > 0$ tale che

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M \quad \forall\, x \in (A \setminus \{x_0\}) \cap W$$

per qualche intorno $W \in \mathscr{U}_{x_0}$.

In altre parole il quoziente $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ è localmente limitato per $x \to x_0$.

Definizione 0.0.2 (o piccolo)**.** Se esiste $\omega\colon A \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \omega(x) \cdot g(x)$ e $\omega(x) \to 0$ per $x \to x_0$ si scrive

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0.$$

In questo caso si dice che f *è un "o piccolo" di g per $x \to x_0$*.

La definizione implica che:

- se $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \in \mathbb{R}$ allora

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0.$$

- se $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ allora

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0.$$

Notare che se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ allora è vero anche che $f(x) = O(g(x))$ per $x \to x_0$.

Esercizio 0.0.1. Fare ("costruire") esempi di f, g tali che $f = o(g)$ e $f = O(g)$ per $x \to x_0$.

Esercizio 0.0.2. Verificare le seguenti scritture asintotiche:

- $\sin(x) = O(1)$ per $x \to +\infty$
- $\arctan(x) = O(1)$ per $x \to +\infty$
- $\cos(x^{1003}) = O(1)$ per $x \to +\infty$
- $\arctan(x) = O(x)$ per $x \to 0$
- $x\sin(x) = O(x^2)$ per $x \to 0$
- $x^2 = O(x\sin(x))$ per $x \to 0$
- $x\sqrt{x}e^{2+3x^2} = O(x^{\frac{3}{2}})$ per $x \to 0$

0.1 Integrali generalizzati

Definizione 0.1.1. Siano $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ $(\equiv \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$ $a < b$;
sia $f \in C([a, b[\,, \mathbb{R}) \equiv C([a, b[)$. Allora f è ISG ($\equiv$ *integrabile in senso generalizzato*) su $[a, b[$ se $\exists$ finito

$$\lim_{y \to b^-} \int_a^y f(x)\,dx \quad \left(\overset{def.}{\equiv} \int_a^b f(x)\,dx \right)$$

e si dice che $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ è *convergente.*

Esempio 0.1.1. Sia $\alpha > 0$. Considerare $f(x) = \frac{1}{(1-x)^\alpha}$ in $[0, 1[$.

Oppure, la funzione $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ in $[1, +\infty[$.

Definizione 0.1.2. Siano $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in C(]a, b])$; allora f è ISG su $]a, b]$ se $\exists$ finito

$$\lim_{y \to a^+} \int_y^b f(x)\, dx \quad \left(\stackrel{def.}{\equiv} \int_a^b f(x)\, dx \right)$$

e si dice che $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ è *convergente.*

Esempio 0.1.2. Sia $\alpha > 0$. Considerare $f(x) = \frac{1}{(x-1)^\alpha}$ in $]1, 2]$.

Oppure, la funzione $f(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$ in $] - \infty, -1]$.

Infine:

Definizione 0.1.3. Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, $f \in C(]a, b[)$; allora f è ISG su $]a, b[$ se $\exists$ $c \in]a, b[$ tale che $\exists$ $\int_a^c f(x)\, dx$, $\int_c^b f(x)\, dx$ in senso generalizzato e in tal caso si pone

$$\int_a^b f(x)\, dx \stackrel{def.}{\equiv} \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

Esempio 0.1.3. Sia $\alpha > 0$. Considerare $f(x) = \frac{1}{1+|x|^\alpha}$ in $] - \infty, +\infty[$. Oppure $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ in $]0, +\infty[$.

Osservazione 0.1.1 (facoltativa)**.** L'ultima definizione è *indipendente* da c. Infatti, sia f ISG su $]a, c]$ e su $[c, b[$ e se $\tilde{c} \in]a, b[$ allora:

$$\int_a^{\tilde{c}} f(x)\, dx = \lim_{y \to a^+} \int_y^{\tilde{c}} f(x)\, dx = \lim_{y \to a^+} \left(\int_y^c f(x)\, dx + \int_c^{\tilde{c}} f(x)\, dx \right) \tag{1}$$

ed inoltre

$$\int_{\tilde{c}}^b f(x)\, dx = \lim_{y \to b^-} \int_{\tilde{c}}^y f(x)\, dx = \lim_{y \to b^-} \left(\int_c^y f(x)\, dx + \int_c^{\tilde{c}} f(x)\, dx \right) \tag{2}$$

Pertanto

$$\int_a^{\tilde{c}} f(x)\, dx + \int_{\tilde{c}}^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx;$$

per vederlo basta infatti sommare le precedenti formule (1), (2) ed usare che $\int_c^{\tilde{c}} f(x)\, dx = -\int_{\tilde{c}}^c f(x)\, dx$.

Teorema 0.1.1. *$f \in C([a,b[)$ è ISG su $[a,b[\iff$*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, W \in \mathscr{F}_b : x, x' \in [a,b[\cap W \implies \left| \int_{x'}^{x} f(t)\, dt \right| < \varepsilon.$$

Notazione. $\mathscr{F}_b$ denota la famiglia degli intervalli aperti di $\mathbb{R}$ contenenti b. Pertanto W è un "intorno" di b, del tipo $W =]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$ per qualche $\varepsilon > 0$.

Dimostrazione. (facoltativa). Sia $F\colon [a,b[\to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. Per definizione, si ha

$$\int_a^b f(t)\, dt \text{ è convergente} \iff \exists \lim_{x \to b^-} F(x) \text{ finito.}$$

Ma allora per il <u>Teorema di Cauchy</u>[1] f è ISG su $[a,b[\iff$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, W \in \mathscr{F}_b : x, x' \in [a,b[\cap W \implies |F(x) - F(x')| < \varepsilon$$

che equivale alla tesi. Infatti per l'additività dell'integrale definito si ha

$$F(x) - F(x') = \int_a^x f(t)\, dt - \int_a^{x'} f(t)\, dt = \int_{x'}^{x} f(t)\, dt.$$

□

Osservazione 0.1.2. Vale un risultato del tutto analogo se $f \in C(]a,b])$.

Definizione 0.1.4. $f \in C([a,b[)$ è AISG (cioè, *assolutamente integrabile in senso generalizzato*) su $[a,b[\iff \displaystyle\int_a^b |f(t)|\, dt$ è convergente.
(In altre parole, se il valore assoluto di f è ISG).

[1]Ricordo che vale il seguente:

Teorema 0.1.2 (Cauchy)**.** *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A) \cap \overline{\mathbb{R}}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$. Sono equivalenti:*

1) $\exists\, \lambda \in \mathbb{R} : \lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$
2) $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, W \in \mathscr{U}_{x_0} : \forall\, x, y \in A \setminus \{x_0\}\ (x, y \in W \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$

La 2) si può scrivere, ad esempio, anche così:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta : \forall\, x, y \in A \setminus \{x_0\}\ (x, y \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ ="intorno di raggio δ di x_0"

Teorema 0.1.3. *$f \in C([a,b[)$ è AISG $\implies$ f è ISG.*
$\left(\textit{in altre parole: } \int_a^b |f(t)|\,dt < \infty \implies \int_a^b f(t)\,dt < \infty\right).$

Dimostrazione. Se $\int_a^b |f(t)|\,dt$ è convergente allora

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, W \in \mathscr{F}_b : x, x' \in [a,b[\cap W \quad \text{si ha} \quad \left| \int_x^{x'} |f(t)|\,dt \right| < \varepsilon.$$

Poiché

$$\left| \int_x^{x'} f(t)\,dt \right| \leq \left| \int_x^{x'} |f(t)|\,dt \right|$$

ne segue

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, W \in \mathscr{F}_b : x, x' \in [a,b[\cap W \quad \text{si ha} \quad \left| \int_x^{x'} f(t)\,dt \right| < \varepsilon$$

che equivale alla tesi, per il Teorema 0.1.1. □

Teorema 0.1.4 (del confronto)**.** *Siano $f, g \in C([a,b[)$ tali che $f = O(g) \quad x \to b$. Allora: g è AISG $\implies$ f è AISG.*

La seguente dimostrazione NON è stata svolta in classe ed è riportata in queste note solo come curiosità.

Dimostrazione. Le ipotesi sono:

(1) $\exists\, c \in [a,b[$ e $\exists\, M > 0 : |f(x)| \leq M\,|g(x)| \quad \forall\, x \in [c,b[$

(2) $\lim_{y \to b^-} \int_a^y |g(x)|\,dx < +\infty$ (cioè $\exists$ finito).

Ora notare che:

$$|f| \geq 0 \implies y \mapsto \int_a^y |f(x)|\,dx \text{ è } \nearrow,$$

(cioè, è monotona crescente in y).

Pertanto $\exists \lim_{y \to b^-} \int_a^y |f(x)|\,dx$ (ma non è necessariamente finito).

D'altra parte, per l'ipotesi (1) si ha

$$\int_a^y |f(t)|\,dt = \int_a^c |f(t)|\,dt + \int_c^y |f(t)|\,dt \leq \int_a^c |f(t)|\,dt + M\int_c^y |g(t)|\,dt \quad \forall\, y \in [c, b[.$$

Ne segue

$$\lim_{y\to b^-} \int_a^y |f(t)|\,dt \leq \int_a^c |f(t)|\,dt + M \lim_{y\to b^-} \int_c^y |g(t)|\,dt =$$

$$= \int_a^c |f(t)|\,dt + M\left\{\lim_{y\to b^-} \int_a^y |g(t)|\,dt - \int_a^c |g(t)|\,dt\right\} =$$

$$= \underbrace{\int_a^c |f(t)|\,dt - M\int_a^c |g(t)|\,dt}_{\text{è finito perché } f \text{ e } g \text{ sono in } C([a,c[)} \quad + \quad \underbrace{M \lim_{y\to b^-}\int_a^y |g(t)|\,dt}_{\text{è finito per l'ipotesi (2)}}$$

$$< +\infty.$$

Allora $\exists \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$ in senso generalizzato, cioè f è AISG. □

Analogo risultato vale per $f, g \in C(]a, b])$ o $f, g \in C(]a, b[)$.

Corollario 0.1.1. *Sia $f \in C(]a, b])$. Se $\exists\, \alpha < 1$ tale che $f(x) = O\left(\dfrac{1}{(x-a)^\alpha}\right)$ $x \to a^+$, allora f è AISG su $]a, b]$.*

Dimostrazione. Se $\alpha < 1$ si ha

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx = \lim_{y\to a^+}\int_y^b (x-a)^{-\alpha}\,dx = \lim_{y\to a^+}\left[\frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_{x=y}^{x=b} =$$

$$= \lim_{y\to a^+} \frac{(b-a)^{1-\alpha} - (y-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} =$$

$$= \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \in \mathbb{R} \quad \text{(cioè è finito)}.$$

La tesi segue allora dal Teorema 0.1.4. □

Corollario 0.1.2. *Sia* $f \in C([a,+\infty[)$*. Se* $\exists\, \alpha > 1$ *tale che* $f(x) = O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ $x \to +\infty$*, allora* f *è AISG su* $[a,+\infty[$*.*

Dimostrazione. Sia $a > 0$ (infatti $\int_a^{+\infty} |f(t)|\, dt$ converge se e solo se $\int_c^{+\infty} |f(t)|\, dt < \infty \quad \forall\, c > a$. Pertanto non lede la generalità assumere $a > 0$). Allora

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \lim_{y\to+\infty} \int_a^y x^{-\alpha}\, dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_{x=a}^{x=y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{a^{1-\alpha} - y^{1-\alpha}}{\alpha - 1} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} \in \mathbb{R}.$$

Perciò si usa il Teorema 0.1.4 e si ha la tesi. □

0.2 Esempi ed esercizi

Esercizio 0.2.1. Calcolare esplicitamente i seguenti:

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$;

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{-x^2}\, dx$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2}\, dx$.

Esercizio 0.2.2. Discutere l'integrabilità in senso generalizzato dei seguenti:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+x^3}$;

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$;

(3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3 \lg x}\, dx$.

Soluzioni.

(1) Si ha

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= o(x^3) \quad x \to +\infty \quad \text{e} \\ x^3 &= o(\sqrt{x}\,) \quad x \to 0^+ \end{aligned}$$

Pertanto, in particolare, si ha

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + x^3} = \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) & x \to +\infty \\ \\ O\left(\dfrac{1}{x^3}\right) & x \to 0^+. \end{cases}$$

Applicando quindi il Corollario 0.1.1 e il Corollario 0.1.2 si ottiene subito l'integrabilità in senso generalizzato e poiché $f \geq 0$ in $[0, +\infty[$ anche l'assoluta integrabilità in S.G. (cioè f è AISG).

(2) Basta osservare che f, che è pari e strettamente positiva, è minore di 1 in $[0, 1]$ e minore di $\dfrac{1}{x^4}$ in $[1, +\infty[$. Allora la soluzione è affermativa e si ottiene usando il Corollario 0.1.2, visto che $f(x) = O(1/x^4)$ per $x \to +\infty$. Una soluzione alternativa è la seguente.
Basta osservare che se $|x| \geq 1$ si ha

$$\frac{1}{1 + x^4} \leq \frac{1}{1 + x^2}$$

e che se $|x| < 1$ la funzione è continua. Pertanto $\forall\ \xi > 1$ si ha

$$\int_\xi^y f(x)\, dx \leq \int_\xi^y \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \operatorname{arctg} x \Big|_\xi^y$$

$$\left(\text{stessa cosa vale se } \xi < -1, \text{ cioè } \int_y^\xi f(x)\, dx \leq \int_y^\xi \frac{1}{1 + x^2}\, dx\right).$$

(3) Sia $f(x) = \dfrac{1}{x^3 \lg x}$. Allora $f(x) \to +\infty$ se $x \to 1^+$, mentre $f(x) \to 0$ se $x \to +\infty$. Più precisamente si ha:

(in 1^-) Usare lo sviluppo $\lg(1 + y) \sim y \quad y \to 0$. Da questo si ottiene:

$$f(x) \sim \frac{1}{\lg x} \sim \frac{1}{x - 1} \quad x \to 1^+$$

si potrebbe scrivere, equivalentemente, cosí:

$$f(x) = \frac{1}{\lg x} + O(1) = \frac{1}{x-1} + O(1) \quad (x \to 1^+)$$

Pertanto, in un intorno destro di 1, f non è integrabile in S.G.
$\left(\text{basta osservare che } \dfrac{1}{x-1} \text{ non è integrabile in } 1\right).$

Notare che invece, all'infinito, si avrebbe integrabilità, visto che

$$f(x) = \frac{1}{x^3 \lg x} \leq \frac{1}{x^3}$$

che è integrabile in S.G.
Pertanto f sarebbe AISG in $[1+\varepsilon, +\infty[\quad \forall\, \varepsilon > 0$, ma non su $[1, +\infty[$.

$\square$

Esercizio 0.2.3. Studiare la convergenza del seguente integrale

$$\int_0^1 \lg\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Svolgimento. In un intorno destro di $x = 0$ si ha che

$$f(x) = \lg\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty;$$

inoltre $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$. Poiché risulta $f \in C([\varepsilon, 1]) \quad \forall\, \varepsilon \in\,]0,1[$, occorre studiare il comportamento asintotico di f in 0.
Poiché: $\lg y = o(y^\alpha) \quad \forall\, \alpha > 0 \quad y \to +\infty$ ne segue

$$\lg\left(\frac{1}{x}\right) = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \qquad x \to 0^+ \qquad \forall\, \alpha > 0.$$

In particolare, si può prendere $\alpha < 1$ ed applicando poi il Corollario 0.1.1 segue che f è AISG.
$\left(\text{Notare che } f = o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right) \quad x \to 0^+ \implies f = O\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right) \quad x \to 0^+\right).$ $\square$

Esercizio 0.2.4. Discutere la convergenza assoluta per i seguenti integrali generalizzati al variare dei parametri reali α, β (assumere per semplicità che $\alpha, \beta > 0$):

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x^\alpha - 1)\operatorname{arctg} x}{(x^\beta + 1)}\, dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \operatorname{arctg} x}{(x^\beta + 1)}\, dx \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}),$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x^2)|}{x^\beta (x^\alpha + 3)}\, dx, \qquad \int_2^{3} \frac{|\cos x|\ |\sin x|}{(x+2)^\alpha (x^2 - 9)|x-3|^{2\beta+3}}\, dx,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x^\beta)}{x^\alpha (1+x)}\, dx, \qquad \int_3^{+\infty} \frac{|\cos x|\ |\sin x|}{(x+2)^\alpha (x^2 - 9)|x-3|^{2\beta+3}}\, dx \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

Excursus: integrali oscillanti

Enunciamo senza dimostrazione il seguente:

Teorema 0.2.1 (Convergenza degli integrali oscillanti)**.** *Siano* $f \in C([a, b[)$, $g \in C^1([a, b[)$ *e valgono:*

1) f *ha primitiva limitata in* $[a, b[$ *;*

2) g *è monotona (*$\nearrow$ *o* $\searrow \equiv$ *crescente o decrescente);*

3) $\lim\limits_{x \to b} g(x) = 0$.

Allora $\displaystyle\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \quad \exists$ *in senso generalizzato (ossia,* fg *è ISG in* $[a, b[$*).*

Esempio 0.2.1 (**Importante**)**.** Si ha

$$\forall\, \alpha > 0 \quad \exists \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx \quad \text{in S.G..}$$

Infatti $x \mapsto \sin x$ è continua con primitiva continua e limitata e si ha che $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha} \searrow$ (è monotona decrescente) e $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^\alpha} = 0$ (cioè valgono le ipotesi 1), 2) e 3) del Teorema 0.2.1).

Osservazione 0.2.1. Si ha

$$AISG \overset{\textit{implica}}{\Longrightarrow} ISG$$

ma

$$ISG \overset{\textit{non implica}}{\not\Longrightarrow} AISG$$

Infatti

$$h(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha} \quad \text{è} \quad \begin{cases} AISG \text{ su } [1, +\infty[& \text{se } \alpha > 1 \\ \text{non è } AISG \text{ (ma solo } ISG) \text{ su } [1, +\infty[& \text{se } \alpha \in \,]0, 1] \end{cases}$$

Dimostriamolo. Infatti

$$1 \geq |\sin x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \implies |\sin x| \geq |\sin x|^2 = \sin^2 x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Ne segue che:

$$\lim_{y\to+\infty}\int_1^y \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\,dx \geq \lim_{y\to+\infty}\int_1^y \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,dx = \lim_{y\to+\infty}\left(\int_1^y \frac{1-\cos 2x}{2x^\alpha}\,dx\right) =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\left(\int_1^y \frac{1}{x^\alpha}\,dx - \int_1^y \frac{\cos 2x}{x^\alpha}\,dx\right)\right)$$

dove abbiamo usato le *formule di duplicazione*:

$$\begin{aligned} &\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \\ &\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \end{aligned} \qquad (\forall\ \alpha \in \mathbb{R})$$

Esercizio 0.2.5. A partire dalle formule di "somma e sottrazione" per le funzioni sin e cos ottenere le formule di duplicazione.

Riprendiamo l'esempio. Dall'ultima formula si trova che se $\alpha < 1$ allora il primo addendo $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = +\infty$, ossia non è convergente in S.G.
Inoltre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^\alpha}\,dx$ è finito; dunque esiste in S.G.
$\Big($per la stessa ragione per cui $\exists \displaystyle\int \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ in S.G. e, infatti, basta applicare il Teorema 0.2.1$\Big)$.
Per concludere la prova dell'affermazione che volevamo dimostrare, basta osservare che:

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\,dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad \text{che converge se } \alpha > 1.$$

Esercizio 0.2.6. Mostrare che $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,dt$ converge.
[Suggerimento: Usare la sostituzione $x = t^2$ che è, in effetti, una biiezione di $[0, +\infty[$ in sé stesso. Trattare separatamente la convergenza in 0 ed a $+\infty$. Si dovrà poi usare il Teorema sugli integrali oscillanti...]