Integrale Indefinito

PROBLEMA: *Data una funzione*[1] $f : I \to \mathbb{R}$, *dove* $I :=]a, b[\subseteq \mathbb{R}$, *trovare una funzione derivabile* $F : I \to \mathbb{R}$, *tale che* $F'(x) = f(x)$ *per ogni* $x \in I$.
Una tale funzione, se esiste, si chiama **primitiva** di f su I. Inoltre, da ora in poi, scriveremo

$$F(x) = \int f(x)\, dx \qquad (x \in I).$$

Ossia, per indicare la primitiva F di f (ma anche il problema stesso di trovare la primitiva di f) useremo il simbolo appena introdotto che viene usualmente chiamato **integrale indefinito** di f.

Per prima cosa, si osservi che se F è una primitiva di f, allora anche $F(x) + C$ è una primitiva, per ogni (numero) $C \in \mathbb{R}$. Pertanto, d'ora in poi, scriveremo, più precisamente

$$F(x) + C = \int f(x)\, dx \qquad \forall\, C \in \mathbb{R}\ (x \in I).$$

Per molte funzioni, il problema precedente può essere risolto abbastanza facilmente. La risposta, in effetti, per molte funzioni elementari, è fornita dalla tabella delle derivate delle funzioni elementari, ma... **letta al contrario!**

Esempi.

- Partiamo da $f(x) = a$ con $a \in \mathbb{R}$ fissato. Allora, è facile vedere che, posto $F(x) = ax$, si ha sempre $F'(x) = a$. Pertanto

$$\int a\, dx = ax + C.$$

- Più in generale, sia $f(x) = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato. Ricordiamo preliminarmente che se si considera la funzione $g(x) = x^\beta$, dove $\beta \in \mathbb{R}$, si ha sempre $g'(x) = \beta x^{\beta - 1}$. Qual è allora una primitiva di x^α? Essa è $F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$. Possiamo pertanto scrivere

$$\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C$$

[1] Notare che se si assume che f è continua, allora F dovrà essere di classe $\mathbf{C}^1$.

- Sia $f(x) = e^x$. Sappiamo che $De^x = e^x$. Pertanto
$$\int e^x \, dx = e^x + C.$$
Più in generale, consideriamo l'esponenziale in base $a > 0$ ($a \neq 1$), ossia $f(x) = a^x$. Ricordando che $Da^x = \log a \cdot a^x$, segue subito che $D\left(\frac{a^x}{\log a}\right) = a^x$, ossia possiamo sempre scrivere
$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log a} + C.$$

- Se $f(x) = \frac{1}{x}$ dove $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora **conosciamo già (!!!)** una funzione la cui derivata è $f(x)$: infatti $D(\log|x|) = \frac{1}{x}$. Pertanto
$$\int \frac{1}{x} \, dx = \log|x| + C.$$

- Se $f(x) = \cos(x)$ conosciamo già una funzione la cui derivata è $f(x)$: infatti $D(\sin(x)) = \cos(x)$. Pertanto
$$\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + C.$$
Analogamente, dato che $D\cos(x) = -\sin(x)$, allora ne consegue che
$$\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + C.$$

- Se $f(x) = \cosh(x)$ conosciamo già una funzione la cui derivata è $f(x)$: infatti $D(\sinh(x)) = \cosh(x)$. Pertanto
$$\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + C.$$
Analogamente, dato che $D\cosh(x) = \sinh(x)$, allora ne consegue che
$$\int \sinh(x) \, dx = \cosh(x) + C.$$

- Se $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, come possiamo trovare una primitiva di f? Basta ricordare che la funzione $\arctan(x)$ ha per derivata $f(x)$, ossia che $D\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Pertanto, si ha
$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan(x) + C.$$

- Se $f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, come possiamo trovare una primitiva di f? Basta ricordare che la funzione $\tan(x)$ ha per derivata $f(x)$, ossia che $D\tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$. Pertanto, si ha
$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan(x) + C.$$
Analogamente[2], osservando che $D(\cot(x)) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$, segue subito che
$$\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx = -\cot(x) + C.$$

- Se $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, come possiamo trovare una primitiva di f? Basta ricordare che la funzione $\arcsin(x)$ ha per derivata $f(x)$, ossia che $D\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Pertanto, si ha
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C = -\arccos(x) + C',$$
dove l'ultima uguaglianza è banale.

A questo punto, enunciamo le proprietà salienti dell'integrale definito.
Valgono le seguenti:

- **(Linearità)** Assumiamo che $f, g : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni che ammettono una primitiva. Allora
$$\int (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx \qquad \forall\,\alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

- **(Principio di Sostituzione)** Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile. Sia $\varphi : J \to I$ una biiezione (ossia, iniettiva e tale che $\varphi(J) = I$) e si assuma che $\varphi \in \mathbf{C}^1(J)$. Allora
$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

- **(Integrazione per Parti)** Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni derivabili, si ha
$$\int f'(x)g(x)\,dx = -\int f(x)g'(x)\,dx + f(x)g(x) + C \qquad \forall\, C \in \mathbb{R}.$$

[2]**Per definizione,** $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$**.**

La dimostrazione di queste prorietà è immediata[3], nelle ipotesi date. Si tratta solo di applicare la definizione di primitiva. [Le rispettive proprietà che abbiamo enunciato nel caso dell'integrale definito-di Riemann- invece sono meno banali e richiedono una dimostrazione rigorosa, come fatto nelle dispense: interpretate queste di sopra come regole "pratiche" che servono nel calcolo degli integrali.]

Enuncio di seguito una lista di primitive "immediate" (ma molto generali, visto che si assume implicitamente che f è una *qualsiasi funzione derivabile*), che si ottengono facilmente dalla regola di derivazione della funzione composta (ossia, con il principio di sostituzione appena enunciato).

Di seguito[4] $C \in \mathbb{R}$ è un'arbitraria costante reale.

- $$\int [f(x)]^{\alpha} f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$$
- $$\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C.$$

  Più in generale, si ha
  $$\int a^{f(x)}\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + C.$$
- $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C.$$
- $$\int \cos(f(x)) f'(x)\,dx = \sin(f(x)) + C.$$

[3]La prima (ossia la linearità) segue, per definizione di integrale indefinito, derivando ambo i membri: infatti si ottiene $(\alpha f + \beta g)(x) = \frac{d}{dx}\int(\alpha f+\beta g)(x)\,dx = \alpha\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx + \beta\frac{d}{dx}\int g(x)\,dx = \alpha f(x) + \beta g(x)$. La seconda proprietà si può dimostrare come segue: partiamo dalla funzione $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ e notiamo che una sua primitiva è data dalla funzione $F(\varphi(t))$, dove $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ su I (ossia, $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$). Infatti, derivando in t tale funzione, si ottiene $\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ (si osservi l'uso del teorema di derivazione della funzione composta, che si può adoperare, nelle ipotesi fatte). D'altra parte, la primitiva a primo membro è proprio $F(x)$ per ogni $x \in I$. La terza (formula di integrazione per parti) infine segue derivando -regola di Leibnitz- il prodotto $f(x)g(x)$. Si ottiene cioè $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Questa formula, valida per ogni $x \in I$, dice dunque che una primitiva della funzione $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ è -banalmente- la funzione $f(x)g(x)$. Ossia, una primitiva di $f'(x)g(x)$ si ottiene sommando di una primitiva di $-f(x)g'(x)$ con la funzione $f(x)g(x)$.

[4]Chiaramente, alcune delle funzioni che appaiono, richiedono **condizioni di esistenza** che dovreste cercare di formulare, se necessarie. Per esempio, nel terzo integrale indefinito, $f(x)$ deve essere diversa da 0, etc..

Analogamente
$$\int \sin(f(x))f'(x)\,dx = -\cos(f(x)) + C.$$

- $$\int \cos(f(x))f'(x)\,dx = \sin(f(x)) + C.$$

  Analogamente
  $$\int \sinh(f(x))f'(x)\,dx = \cosh(f(x)) + C.$$

- $$\int \frac{f(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx = \arctan(f(x)) + C.$$

- $$\int \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}\,dx = \tan(f(x)) + C.$$

  Analogamente
  $$\int \frac{f'(x)}{\sin^2(f(x))}\,dx = -\cot(f(x)) + C.$$

- $$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,dx = \arcsin(f(x)) + C = -\arccos(f(x)) + C.$$