Introduzione alle ODE's

La teoria delle equazioni differenziali ordinarie è centrale nella matematica, in particolare, nelle applicazioni, in quanto utile nel costruire "modelli" di comportamento/evoluzione -nel tempo- di quasi ogni sistema fisico, biologico, sociale, etc.

Esempio 0.0.1 (1978, Malthus: crescita di una popolazione)**.** Si studia una popolazione isolata e si assume che crescita/decrescita della stessa dipendano solo da cause interne alla popolazione. Poniamo

- $N(t) := \#$ individui al tempo t,
- $\lambda := \#$ nati per unità di tempo,
- $\mu := \#$ morti per unità di tempo.

Posto $\varepsilon := \lambda - \mu$ ("potenziale biologico"), si ottiene che l'equazione

$$\dot{N}(t) = \varepsilon N(t)$$

regola (modella) la variazione del numero di individui della popolazione. Le soluzioni sono esponenziali: ossia, si dimostra che $N(t) = Ce^{\varepsilon t}$, per cui $N(t)$ *esplode/decade esponenzialmente per* $t \to +\infty$. Se si fissano un tempo iniziale t_0 ed un valore iniziale N_0 di $N(t)$, si sta studiando un *Problema di Cauchy* associato all'equazione data. In altre parole, si stanno fissando le condizioni iniziali ($\equiv$ C.I.): ciò consente di "selezionare" una soluzione particolare (ed una soltanto). Il grafico nel piano cartesiano di una soluzione dell'equazione si chiama *curva integrale.*

Questo modello, seppur rozzo, fornisce alcune informazioni: raffinando il modello, si migliorano le informazioni ottenute.
Curiosità: la stessa equazione modella il cosiddetto *decadimento radioattivo.*

Esempio 0.0.2. La ricerca della primitiva di una funzione $f \in \mathbf{C}(I)$ è la più semplice equazione differenziale:

$$\dot{y} = f(x) \qquad (t \in I).$$

La soluzione sapete sempre trovarla...(almeno in linea teorica) integrando ambo i membri.

Definizione 0.0.1 (Equazione Differenziale di ordine n)**.** Sia $n \in \mathbb{N}$. Un' equazione differenziale -ordinaria- di ordine n è un'equazione

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

dove si cercano soluzioni $y = y(x)$ e dove $F : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ è una funzione (implicita) della variabile indipendente x e delle altre variabili $y, y', ..., y^{(n)}$ (ossia di y e delle sue derivate, fino all'n-esima). Ogni funzione $y = \varphi(x)$ che sostituita nell'equazione la soddisfa identicamente si chiama soluzione generale (o *integrale generale*): esso dipende -a priori- da *#n costanti arbitrarie,* ossia $C_1, ..., C_n \in \mathbb{R}$. Se è data una soluzione generale φ, e se si fanno assumere dei valori specifici alle n costanti arbitrarie, allora si dice che tale soluzione è una *soluzione particolare.* Il grafico

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \varphi(x) \,\text{è soluzione di (1)}\}$$

di ogni soluzione si chiama *curva integrale.*

Se è possibile "riscrivere" (1) nella forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}), \tag{2}$$

tale equazione viene detta in *forma normale.*

Adesso fissiamo $x_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ assieme alle seguenti condizioni aggiuntive (sono condizioni iniziali, abbrev. C.I.):

$$y_0 = y(x_0),\, y_0' = y'(x_0), ..., y_0^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_0).$$

Si chiama *Problema di Cauchy associato a* (2) lo studio di (2) soggetto alle precedenti C.I..

Esempio 0.0.3 (Equazione di Newton)**.** Se $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$ indica la posizione in $\mathbb{R}^3$ di un punto materiale (si assuma di massa unitaria) che si muove soggetto ad un campo di forze $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}, t)$, allora il sistema di equazioni differenziale lineari del secondo ordine

$$\ddot{\overrightarrow{x}} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}, t)$$

regola la "dinamica" del punto.

0.1 Appendice

0.1.1 Equazioni Differenziali Lineari

Definizione 0.1.1 (Equazione lineare di ordine n)**.** Sia $n \in \mathbb{N}$; siano $a_i \in C(I)$ funzioni continue, dove $I \subseteq \mathbb{R}$, intervallo aperto, e $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Si dice *equazione differenziale lineare di ordine n, omogenea* l'equazione:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2y^{(2)} + a_1y^{(1)} + a_0y = 0 \tag{3}$$

Se inoltre $b \in C(I)$ si chiama *equazione differenziale lineare non omogenea di ordine* n la seguente equazione:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2y^{(2)} + a_1y^{(1)} + a_0y = b \tag{4}$$

Se $n = 1$ abbiamo studieremo poi la teoria, che è facile: infatti esiste una formula risolutiva.

Una teoria sviluppata (nel caso generale) di queste equazioni c'è ma non è facile come nel caso $n = 1$.

Osservazione 0.1.1. E' facile vedere che l'equazione (3) è analoga, a patto di effettuare un semplice cambiamento di variabili, ad un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine, ossia quanto segue:

Definizione 0.1.2 (Sistema di equazioni differenziali lineari del *1mo* ordine)**.** Sia $A(t)\colon I \to \mathcal{M}_n$ una funzione a valori in $\mathcal{M}_n$ (matrici di ordine n, a coefficienti reali). Assumiamo che $A(t) = [a_{ij}(t)]_{i,j=1,\ldots,n}$ e che $a_{ij} \in C(I)$, cioè le "entrate" della matrice $A(t)$ sono funzioni continue. Allora l'equazione

$$y' = A(t)y$$

dove $y\colon I \to \mathbb{R}^n$ è un vettore "incognito", si chiama *sistema di equazioni differenziali lineari omogenee del primo ordine* in $\mathbb{R}^n$.

N.B. Se la matrice $A(t)$ è una matrice costante, il sistema si dice *autonomo.*

La soluzione di un sistema di questo genere è molto complessa ed è connessa alla teoria dei "*sistemi lineari*".

Definizione 0.1.3. Sia $A(t)\colon I \to \mathcal{M}_n$ una funzione a valori in $\mathcal{M}_n$ (matrici di ordine n, a coefficienti reali). Assumiamo che $A(t) = [a_{ij}(t)]_{i,j=1,\dots,n}$ ed inoltre che $a_{ij} \in C(I)$, cioè le "entrate" della matrice $A(t)$ sono funzioni continue. L'equazione (vettoriale)

$$y' = A(t)y + b(t)$$

dove $b\colon I \to \mathbb{R}^n$ è continuo (ossia, le componenti sono funzioni continue su I) si dice *sistema (di eq. diff. ordinarie) non omogeneo del primo ordine.*
Se si "prescrive" la condizione iniziale, diventa un *problema di Cauchy.* Cioè:

$$\begin{cases} y' = A(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \quad (t_0 \in I) \end{cases} \tag{5}$$

Ritornando all'equazione lineare di ordine n (omogenea o no) si ha un *problema di Cauchy*, quando si prescrivono le seguenti quantità:

$$y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_0^1 \in \mathbb{R}, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{n-1} \in \mathbb{R}$$

Cioè: serve fissare non solo il valore iniziale dell'incognita $y(t)$, ma anche di tutte le sue derivate, fino alla $n-1$-esima.
(Notare che, nel caso $n = 1$, si prescrive *solo* il valore di $y(t_0)$).

0.1.2 Esempio: equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti (caso omogeneo)

$$y'' + ay' + b = 0 \tag{6}$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$.
Le soluzioni di (6) sono legate a quelle dell'equazione di secondo grado

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

(1) $\lambda_{1,2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ e $a^2 > 4b$.

In tal caso $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Si ha:

$$y_1 = e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 t}$$

sono soluzioni linearmente indipendenti di (6) e ogni combinazione lineare di y_1 e y_2 è soluzione di (6). (Per questo si dice che l'equazione è lineare. Notare inoltre che l'insieme delle soluzioni è, per questa ragione, uno *spazio vettoriale di dimensione 2*).

(2) Se $a^2 = 4b$ si ha che $\lambda_1 = \lambda_2 \overset{def.}{=} \lambda \in \mathbb{R}$. Allora

$$y_1 = e^{\lambda t}, \quad y_2 = t\, e^{\lambda t}$$

sono soluzioni linearmente indipendenti di (6) ed ogni combinazione lineare di y_1 e y_2 è soluzione di (6).

(3) $\lambda = \lambda_1 \pm i\lambda_2$ (ossia $a^2 - 4b < 0$).
In tal caso si dimostra che le funzioni

$$y_1 = e^{\lambda_1 t} \cos(\lambda_2 t), \quad y_2 = e^{\lambda_1 t} \sin(\lambda_2 t)$$

sono soluzioni linearmente indipendenti di (6) e (anche in questo caso) ogni loro combinazione lineare è soluzione di (6).

Pertanto

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie, è la *soluzione generale* dell'equazione data (con y_1, y_2 date, a seconda dei casi (1), (2), (3), come sopra).
Finisco dicendo che il problema di Cauchy in questo caso sarebbe posto quando si prescrivono

$$y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad y'(t_0) = y_0^1 \in \mathbb{R}$$

("*posizione iniziale*" e "*velocità iniziale*").

Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

0.2 Equazioni lineari del primo ordine

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo non banale ed $a, b \in C(I)$ (ossia funzioni continue su I). Allora $\varphi \in C^1(I)$ si dice soluzione di

$$y' = a(x)\,y + b(x) \quad \forall\, x \in I \tag{7}$$

se e solo se si ha che $\varphi'(x) = a(x)\varphi(x) + b(x) \quad \forall\ x \in I$. L'equazione (7) è detta *equazione differenziale lineare del primo ordine.*
Sia inoltre $x_0 \in I$. Se si richiede che la soluzione di (7) soddisfi la *condizione iniziale* $y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}$, si usa dire che è un *Problema di Cauchy* associato all'equazione (7). (In altre parole, per definizione, un Problema di Cauchy è un'equazione differenziale con in più una condizione iniziale che la soluzione trovata deve soddisfare.)

Teorema 0.2.1 (Esistenza ed Unicità)**.** *Sia $x_0 \in I$. Allora $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ è soluzione di* (7) *se e solo se*

$$\varphi(x) = e^{A(x)} \left(C + \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-A(t)}\, dt \right) \quad \forall\, x \in I, \tag{8}$$

dove $A(x) \overset{def.}{\equiv} \displaystyle\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt$. In altre parole, si ha che <u>esiste un'unica soluzione</u> del Problema di Cauchy associato all'equazione (7)*.*

Implicitamente, il teorema precedente fornisce anche l'integrale generale di (7). Infatti, usando integrali indefiniti, esso si può scrivere, così:

$$\varphi(x) = e^{A(x)} \left(C + \int b(x)\, e^{-A(x)}\, dx \right) \qquad (C \in \mathbb{R}),$$

dove ora s'intende che $A(x) = \int a(x) dx$.

Dimostrazione. Verifichiamo che ogni φ della forma (8) è soluzione di (7). Infatti:

$$\varphi'(x) = e^{A(x)}A'(x)\left[C + \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-A(t)}\, dt\right] + e^{A(x)}\left[b(x)\, e^{-A(x)}\right] =$$

$$= e^{A(x)}a(x)\left[C + \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-A(t)}\, dt\right] + e^{A(x)}b(x)\, e^{-A(x)} =$$

$$= e^{A(x)}a(x)\left[C + \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-A(t)}\, dt\right] + b(x).$$

Sostituendo in (7) si ottiene una identità:

$$e^{A(x)}\left[a(x)\cdot C + a(x)\int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-A(t)}\, dt\right] + b(x) =$$

$$= a(x)\left[e^{A(x)}\left(C + \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-A(t)}\, dt\right)\right] + b(x).$$

(Ciò prova la prima implicazione. Ora vediamo l'altra.) Sia ora $\varphi \in C^1(I)$ una soluzione di (7) e poniamo $\psi\colon I \to \mathbb{R}$, $\psi(x) = e^{-A(x)}\varphi(x)$. Allora $\psi \in C^1(I)$ e si ha:

$$\psi'(x) = -A'(x)e^{-A(x)}\varphi(x) + e^{-A(x)}\varphi'(x) = e^{-A(x)}\left(\varphi'(x) - A'(x)\varphi(x)\right) = e^{-A(x)}b(x).$$

Ciò vuol dire che $\psi'(x) = e^{-A(x)}b(x) \quad \forall\, x \in I$. Per il Teorema Fondamentale del Calcolo (=TFC) segue che

$$\psi(x) = \psi(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}b(t)\, dt \quad \forall\, x \in I. \tag{TFC}$$

Per come è stata definita si ha $\psi(x) = e^{-A(x)}\varphi(x)$ e pertanto $\psi(x_0) = \varphi(x_0)$. Ne segue

$$e^{-A(x)}\varphi(x) = \psi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}b(t)\, dt \implies$$

$$\varphi(x) = e^{A(x)}\left[\varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}b(t)\, dt\right] \quad \forall\, x \in I.$$

Ma quest'ultima espressione coincide con (7) se si pone $C = \varphi(x_0)$. $\square$

Osservazione 0.2.1. (**N.B.** *Qui sotto spiego un modo diverso per risolvere un'equazione lineare del primo ordine, ossia un Problema di Cauchy associato ad essa.*) Sia $y' = a(x)\, y \quad (x \in I)$.
In tal caso l'equazione si dice "omogenea". Allora $y' = a(x)\, y$ e se supponiamo che $y \neq 0$ (ad es. $y > 0$) si ha

$$\frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}(\lg y) = a(x) \quad (\forall\, x \in I)$$

ossia (integrando ambo i membri tra x_0 ed x)

$$\lg y = \lg y(x_0) + \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt \implies$$

$$y(x) = e^{\lg(y(x_0)) + \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt} = y(x_0) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt} = y(x_0) \cdot e^{A(x)}.$$

In altre parole la funzione trovata risolve l'equazione omogenea associata.
Osservare anche che la funzione $y(x) = C\, e^{A(x)}$ risolve *sempre* l'omogenea, quale che sia $C \in \mathbb{R}$.
Cerchiamo ora, a partire dalla soluzione dell'omogenea, la soluzione generale di $y' = ay + b$ (con $a, b \in C(I)$). (E' detto metodo della "*variazione delle costanti*" ma nel caso più elementare.)
Sia $y(x) = C\, e^{A(x)} \quad (x \in I)$ dove ora C la penso come funzione (non più costante) incognita da determinare. In tal caso si ha:

$$y' = C'e^{A} + CA'e^{A} = e^{A}(C' + Ca).$$

Allora

$$C' = e^{-A(x)}b(x) \quad \forall\, x \in I \implies C(x) = C(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}b(t)\, dt.$$

Ne segue

$$y(x) = e^{A(x)} \left(C(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}b(t)\, dt \right).$$

Se inoltre $y(x_0) = y_0$ ($\in \mathbb{R}$) ne segue

$$y(x_0) = y_0 = e^{A(x_0)}C(x_0) \iff C(x_0) = e^{-A(x_0)}y_0 \iff C(x_0) = y_0 \quad \star$$

$$y(x) = e^{A(x)} \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}b(t)\, dt \right].$$

$\star$ Infatti $A(x_0) = 0 \implies e^{-A(x_0)} = 1$.

Abbiamo riottenuto (a mano) lo stesso risultato di prima.

0.3 Equazioni a variabili separabili

Definizione 0.3.1. Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli aperti, $f \in C(I)$, $g \in C(J)$. Si dice *equazione a variabili separabili* ogni equazione del tipo

$$\begin{cases} y' = f(x)\, g(y) \quad \forall\, x \in I \quad (*) \\ (y(x_0) = y_0 \ \in J) \end{cases} \tag{9}$$

dove y è una funzione della variabile $x \in I$; se si impone una *condizione iniziale* $y(x_0) = y_0 \in J$ con $x_0 \in I$, il precedente è detto *problema di Cauchy* per l'equazione a variabili separabili $(*)$.

Osservazioni.

1) Se $g(y_0) = 0 \overset{allora}{\Longrightarrow} y = y_0$ è soluzione (costante) del problema di Cauchy.

2) Sia $g(y_0) \neq 0 \implies \exists\, J_1 \subseteq J\, (J_1 \in \mathscr{U}_{y_0})$ sul quale $g(y) \neq 0$ (segue dalla permanenza del segno).
Adesso divido ambo i membri per g:

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x),$$

dove $x \in I_1 \subseteq I\, (I_1 \in \mathscr{U}_{x_0})$ e I_1 è tale che $y(x) \in J_1$ se $x \in I_1$ (ossia $y(I_1) \subseteq J_1$).
Allora sia $G \in C^1(J_1)$ primitiva di $\frac{1}{g}$. G è definita in J_1 (sul quale $g \neq 0$) e dunque

$$G' = \frac{1}{g} \neq 0$$

che implica $G \nearrow$ oppure $\searrow$ ma *strettamente*; G è pertanto invertibile.
Sia ora F una primitiva di f. Integrando si ha

$$G(y(x)) = F(x) + C \quad (x \in I_1,\ \text{dove } C \text{ è costante reale}).$$

Si ha inoltre:

$$C = G(\underbrace{y(x_0)}_{=y_0}) - F(x_0) \implies y(x) = G^{-1}(F(x) - F(x_0) + G(y_0)) \quad (x \in I_1),$$

dove $G^{-1}\colon G(J_1) \to J_1$ è l'inversa di G.

Concludendo:

Abbiamo due tipi di soluzioni:

1) costanti (se $g(y_0) = 0$) del tipo $y = y_0$;

2) soluzioni per cui $g(y) \neq 0$, se $y \in J_1$, per qualche opportuno intervallo $J_1 \in \mathscr{U}_{y_0}$, $J_1 \subseteq J$.

Teorema 0.3.1. *Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli aperti, $x_0 \in I$, $y_0 \in J$, $f \in C(I)$, $g \in C(J)$ e $g \neq 0$ in J. Allora il problema di Cauchy (9) ha soluzione unica $y \in C^1(I_1)$ data da*

$$y(x) = G^{-1}(F(x) - F(x_0) + G(y_0)) \quad \forall\, x \in I_1,$$

dove: $I_1\,(\subseteq I)$ è un intervallo aperto contenente x_0 e $y(I_1) \subseteq J$, G è una primitiva di $\dfrac{1}{g}$ in J, con inversa $G^{-1}\colon G(J) \to J$, F è una primitiva di f in I_1.

Esercizi ed Esempi.

1) $\begin{cases} \dot{y} = \dfrac{y}{t} + 3t^3 \\ \\ y(-1) = 2 \end{cases}$

Soluzione. $a(t) = \dfrac{1}{t},\ b(t) = 3t^3,\ t_0 = -1,\ y_0 = 2$; dato che $t_0 < 0$, allora si sceglie $I =]-\infty, 0[$. Trovo

$$A(t) = \int a(t)\,dt = \int \frac{dt}{t} = \lg(-t) + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R})$$

$$\Longrightarrow\ y(t) = e^{\lg(-t)+C_1}\left(C_0 + \int 3t^3\, e^{-\lg(-t)-C_1}\,dt\right) =$$

$$= -t\left(\underbrace{e^{C_1}C_0}_{=C} + 3\, e^{C_1-C_1}\int \frac{t^3}{(-t)}\,dt\right) =$$

$$= -Ct + 3t\int t^2\,dt = -Ct + t^4 \quad (t \in I).$$

Ora uso la C. I. $y(-1) = 2$. Si ha:

$$y(-1) = 2 = -C(-1) + (-1)^4 = C + 1 \ \Longrightarrow\ C = 1.$$

□

2)

$$\dot{y} = 2t\sqrt{1-y^2} \quad \text{(senza condizioni iniziali)} \tag{10}$$

Soluzione. $y = \pm 1$ sono rette, soluzioni costanti di (10). Inoltre si ha

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 2\int t\,dt + C \quad (C \in \mathbb{R}),$$

da ciò segue

$$\arcsin y = t^2 + C \ \Longrightarrow\ y = \sin(C + t^2) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

□

Osservazione 0.3.1. Le rette $y = \pm 1$ sono la frontiera del dominio della funzione $h(t, y) = 2t\sqrt{1-y^2}$; sono anche "inviluppo" di tutte le soluzioni trovate sopra. In effetti sono soluzioni che non "rientrano" nella usuale teoria delle equazioni differenziali (mi riferisco al Teorema di esistenza e unicità per le equazioni differenziali del primo ordine).

Esercizio 0.3.1.

$$\begin{cases} y' = y\cos x - \cos x \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Soluzione. E' un problema di Cauchy per un'equazione lineare del primo ordine. Allora

$$y(x) = e^{A(x)}\left(y(x_0) + \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-A(t)}\, dt\right)$$

dove

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt = \int_{0}^{x} \cos t\, dt = \sin x$$

e dunque

$$y(x) = e^{\sin x}\left(-1 - \int_{0}^{x} \cos t\, e^{-\sin t}\, dt\right).$$

Poiché si ha

$$-\int e^{-\sin t}\cos t\, dt = \int d\left(e^{-\sin t}\right),$$

Nota. $d\left(e^{-\sin t}\right) = e^{-\sin t}(-\cos t)\, dt$.

ne segue

$$y(x) = e^{\sin x}\left(-1 + \left(e^{-\sin x} - 1\right)\right) = 1 - 2\, e^{\sin x}.$$

□

Oppure, si può alternativamente risolvere così:

$$\begin{cases} y' = (y-1)\cos x \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

la vedo come equazione a variabili separabili;

allora $\begin{cases} g(y) = y - 1, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = -1 \\ f(x) = \cos x \end{cases}$

Preliminarmente si osserva che: $y(0) = y(0) - 1 = -2 \neq 0$. Allora posso integrare:

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int \cos x\, dx + C \quad (C \in \mathbb{R});$$

allora

$$\lg|y-1| = \sin x + C \qquad \text{e}$$

$$\lg|-2| = C \iff C = \lg 2.$$

Pertanto

$$\lg|y-1| = \sin x + \lg 2$$

ossia

$$\lg\left(\frac{|y-1|}{2}\right) = \sin x \implies |y-1| = 2\,e^{\sin x}$$

e dunque sarebbe $y = 1 \pm 2\,e^{\sin x}$, ma in 0 si ha $y(0) = -1$ che implica $y = 1 - 2\,e^{\sin x}$, come già visto.

Osservazione 0.3.2 (più "algoritmicamente"). Su $J = \left]-\infty, 1\right[$, $g \neq 0$. Inoltre:

$$G(y) = \int_{-1}^{y} \frac{1}{s-1}\, ds = \lg|s-1|\Big|_{s=-1}^{s=y} = \lg|y-1| - \lg 2 =$$

$$\underset{\star}{=} \lg(1-y) - \lg 2 = \lg\left(\frac{1-y}{2}\right).$$

$\star$ questa scelta dipende dal fatto che stiamo su J e dunque $y - 1 < 0$.

Poi si ha $F(x) = \displaystyle\int_0^x \cos t\, dt = \sin x$.

Uso la formula del Teorema dato:

$$y(x) = G^{-1}(\underbrace{\sin x}_{=F(x)}) \quad \text{visto che } C = 0.$$

(Oppure $G(y) = F(x) = \sin x$). Ne segue

$$\lg\left(\frac{1-y}{2}\right) = \sin x \implies \frac{1-y}{2} = e^{\sin x} \iff y = 1 - 2\,e^{\sin x}.$$

Esercizio 0.3.2. Risolvere le seguenti:

- $y' - y/x = x$
- $y' + y = \cos x, \quad y(0) = 1/2$
- $2xy' = 1/y, \quad y(1) = 1$
- $(x^2+1)y' + y^2 = 0$
- $y' = y \sin x + \sin(2x), \quad y(0) = -2$