– –

ANALISI MATEMATICA 1

(Ingegneria dell'Energia, matricole dispari)

Primo appello - Martedì 3 febbraio 2015

TEMA 1

– –

Esercizio 1. [5 p.ti] Determinare l'insieme di definizione di

$$f(x) = \left(\sqrt{-2x^2 + 7x + 4} + 2 - x\right)^{\frac{1}{e^x - 1}} + \arctan \sqrt[6]{\frac{x-1}{x-3}}$$

Esercizio 2. [8 p.ti] Calcolare, al variare del parametro reale $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(x^\alpha - x^2) - 1 + x^{-\log x}}{\tan(\sin x) + \log(1 + x) - \alpha x}$$

Esercizio 3. [7 p.ti] Sia

$$F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{sh} t}{\mathrm{ch} t + 1} dt$$

(a) Determinare l'insieme di definizione D_F di F [0.5 p.ti].

(b) Stabilire se F è pari, dispari, nè pari nè dispari [1.5 p.ti].

(c) Stabilire se F è invertibile in D_F [1 p.to].

(d) Scrivere la formula di Taylor di F di punto iniziale $x_0 = 0$ fino al termine di secondo grado. Dedurre l'ordine di infinitesimo di F per $x \to 0$ rispetto a x [1.5 p.ti].

(e) Stabilire in base alla definizione se l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{sh} t}{\mathrm{ch} t + 1} dt$$

converge oppure diverge [2.5 p.ti]. PAGINA SEGUENTE $\longrightarrow$

Esercizio 4. [3 p.ti] Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2-4|\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ a^2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua in $x = 0$ [2 p.ti]. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2-4|\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

può essere derivabile in $x = 0$? [1 p.to].

Domanda 1. [3 p.ti] Definizione di successione convergente [1 p.to]. Teorema dei carabinieri (con dimostrazione) [2 p.ti].

Domanda 2. [4 p.ti] Definizione del carattere di una serie [2 p.ti]. Condizione necessaria per la convergenza di una serie (con dimostrazione) [1 p.to]. Pensando a tale condizione, cosa si può dire di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}?$$

[1 p.to].

N.B.
– Tutti i RISULTATI devono essere ACCURATAMENTE GIUSTIFICATI.
– La bella copia deve essere fatta sul foglio intestato e siglato. NON SI ACCETTANO BRUTTE COPIE.
– Il tempo a disposizione è di 2 ore e 45 minuti.

ALCUNE SOLUZIONI

Esercizio 1. Occorreva porre:

$$\begin{cases} \sqrt{-2x^2+7x+4}+2-x>0 & \to -\frac{1}{2} \le x < \frac{11}{3} \\ e^x - 1 \neq 0 & \to x \neq 0 \\ \frac{x-1}{x-3} \ge 0, \qquad x \neq 3 & \to x \le 1 \text{ o } x > 3 \end{cases}$$

L'insieme di definizione di $f(x)$ risulta quindi $\big(\big[-\frac{1}{2}, 1\big] \cup \big]3, \frac{11}{3}\big[\big) \setminus \{0\}$.

Esercizio 2. Studio del numeratore $f(x)$. Ricordando innanzitutto che $\cos t - 1 = -\frac{t^2}{2!} + o(t^2)$, si ottiene subito che

$$\cos(x^\alpha - x^2) - 1 = -\frac{(x^\alpha - x^2)^2}{2} + o[(x^\alpha - x^2)^2] = -\frac{1}{2}(x^{2\alpha} + x^4 + 2x^{\alpha+2}) + o[(x^\alpha - x^2)^2]$$

Conseguentemente,

$$\cos(x^\alpha - x^2) - 1 = \begin{cases} -\frac{x^{2\alpha}}{2} + o(x^{2\alpha}) & \text{per } 0 < \alpha < 2 \\ 0 & \text{per } \alpha = 2 \\ -\frac{x^4}{2} + o(x^4) & \text{per } \alpha > 2 \end{cases}$$

Passiamo allo studio di $x^{-\log x}$. Una volta controllato che sia un infinitesimo,

$$\lim_{x \to 0^+} x^{-\log x} = \lim_{x \to 0^+} e^{-\log x \log x} = 0,$$

lo confrontiamo con x^α, $\alpha > 0$. Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^{-\log x}}{x^\alpha} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\log x \log x}}{e^{\alpha \log x}} = \lim_{x \to 0^+} e^{-\log x (\log x + \alpha)} = 0 \qquad \forall \alpha > 0$$

ovvero $x^{-\log x} = o(x^\alpha)$ per ogni $\alpha > 0$. Conseguentemente

$$f(x) = \cos(x^\alpha + x^2) - 1 + x^{-\log x} = \begin{cases} -\frac{x^{2\alpha}}{2} + o(x^{2\alpha}) & \text{per } 0 < \alpha < 2 \\ x^{-\log x} & \text{per } \alpha = 2 \\ -\frac{x^4}{2} + o(x^4) & \text{per } \alpha > 2 \end{cases}$$

Studio del denominatore $g(x)$. Da $\tan t = t + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$ deduciamo che

$$\tan(\sin x) = \sin x + \frac{\sin^3 x}{3} + o(\sin^3 x)$$

ovvero, essendo $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$,

$$\tan(\sin x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) + \frac{1}{3}\left[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right]^3$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

Inoltre, usando anche $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, concludiamo che

$$g(x) = \tan(\sin x) + \log(1+x) - \alpha x$$

$$= x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \alpha x = \begin{cases} (2-\alpha)x + o(x) & \text{per } \alpha \neq 2 \\ -\frac{x^2}{2} + o(x^2) & \text{per } \alpha = 2 \end{cases}$$

Posso infine discutere il limite $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ al variare di $\alpha > 0$, ottenendo i seguenti casi.

- Sia $0 < \alpha < 2$. Allora

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^{2\alpha}}{2} + o(x^{2\alpha})}{(2-\alpha)x + o(x)} \overset{P.S.i.}{=} \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{2(2-\alpha)} x^{2\alpha-1} =$$

$$= \begin{cases} -\infty & \text{per } 0 < \alpha < \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \text{per } \alpha = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{per } \frac{1}{2} < \alpha < 2 \end{cases}$$

- Per $\alpha = 2$ si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-\log x}}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} \overset{P.S.i.}{=} 0$$

- Sia infine $\alpha > 2$. In tal caso

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^4}{2} + o(x^4)}{(2-\alpha x) + o(x)} \overset{P.S.i.}{=} 0$$

Esercizio 3. (a) $D_F = \mathbb{R}$.

(b) Occorre usare la sostituzione $t = -s$:

$$F(-x) = \int_0^{-x} \frac{\text{sh}t}{\text{ch}t + 1} dt = \int_0^{x} \frac{\text{sh}(-s)}{\text{ch}(-s) + 1} d(-s) = \int_0^{x} \frac{\text{sh}s}{\text{ch}s + 1} ds = F(x)$$

Quindi F è pari.

(c) Essendo pari, F è non può essere invertibile in $D_F = \mathbb{R}$.

(d) Risulta

$$F(x) = \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$$

Quindi l'ordine di infinitesimo di F per $x \to 0$ rispetto a x è 2.

(e) In base alla definizione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{sh}t}{\text{ch}t + 1} dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{\text{sh}t}{\text{ch}t + 1} dt = \lim_{x \to +\infty} \log(\text{ch}x+1) - \log 2 = +\infty$$

Quindi l'integrale improprio è divergente.

Esercizio 4. Ricordando il limite fondamentale $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, si ottiene subito che

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x^2 - 4| \sin x}{x} = |-4| = 4.$$

Conseguentemente, $f(x)$ è continua in $x = 0$ se e solo se $a^2 = 4$ ovvero $a = \pm 2$. Quando $a = 0$ la funzione non può essere derivabile in $x = 0$ non essendo ivi continua.