– –

ANALISI MATEMATICA 1

(Ingegneria dell'Energia, matricole dispari)

Secondo appello - Mercoledì 24 febbraio 2016

– –

Esercizio 1. [5 p.ti] Sia

$$f(x) = \ln(|e^x - 1|) - 2x$$

Studiare dominio, limiti agli estremi del dominio, continuità e derivabilità di f, ricercare massimi e minimi (relativi e assoluti) ed eventuali asintoti, abbozzarne il grafico.
Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Esercizio 2. [8 p.ti] Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cosh x - x^4 - 2 - \sin^2 x}{2\sin^4 x + (\sin x - \sinh x)^2}$$

[6 p.ti]. Calcolare, al variare di $\alpha > 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2\cosh x - x^4 - 2 - \sin^2 x}{2\sin^\alpha x + (\sin x - \sinh x)^2}$$

[2 p.ti].

Esercizio 3. [4 p.ti] Dopo aver enunciato il Principio di induzione [1 p.to], provare che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}$$

[2 p.ti] Stabilire, in base alla definizione, il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}$$

ed eventualmente calcolarne la somma [1 p.to].

PAGINA SEGUENTE $\longrightarrow$

Esercizio 4. [3 p.ti] Determinare la soluzione $y(t)$ dell'equazione differenziale

$$(\sin t)y' + (\cos t)y = e^t$$

tale che $y(\frac{\pi}{2}) = 5$ [2 p.ti]. Indicare l'intervallo massimale in cui esiste la funzione $y(t)$ [1 p.to].

Domanda 1. [5 p.ti] Definizione di successione convergente, di successione monotona crescente e di successione limitata [2 p.ti]. Dimostrazione del seguente enunciato: una successione monotona crescente e superiormente limitata è convergente [3 p.ti].

Domanda 2. [5 p.ti] Enunciato e dimostrazione del Teorema della media. Enunciato del Teorema fondamentale del calcolo integrale [2 p.ti]. Sia

$$F(x) = 2 + \int_0^x \frac{\tanh t - 3}{\cos^2 t + 1} dt$$

(a) Si calcoli $F'(0)$ e si dimostri che F è invertibile in $\mathbb{R}$ [1.5 p.ti].

(b) Detta G la sua inversa, si calcoli $G'(2)$ [1.5 p.ti].

N.B.
– Tutti i RISULTATI devono essere ACCURATAMENTE GIUSTIFICATI.
– La bella copia deve essere fatta sul foglio intestato e siglato. NON SI ACCETTANO BRUTTE COPIE.
– Il tempo a disposizione è di 2 ore e 45 minuti.

ALCUNE SOLUZIONI

Esercizio 1. Riscriviamo f nel modo seguente

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}+1 & \text{se } \ 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{-x}+1 & \text{se } \ -1 \leq x < 0 \\ x^2+1 & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

La funzione è pari ($f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$): possiamo quindi limitarci allo studio di f per $x \geq 0$.

• Continuità, derivabilità. Essendo

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \sqrt{x}+1 = f(1) = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2+1 = 2,$$

f risulta continua su tutto $\mathbb{R}$. Derivata prima di f.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{se } \ 0 < x < 1 \\ -\frac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{se } \ -1 < x < 0 \\ 2x & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

Essendo

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{2\sqrt{-x}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x = 2,$$

concludiamo che f non risulta derivabile in $x = 0$, $x = \pm 1$. In particolare, $(0,1)$ è cuspide mentre $(1,2)$ e $(-1,2)$ sono punti angolosi.

• Segno della derivata prima. Dalla formula esplicita per f', concludiamo subito che $f'(x) > 0$ (f crescente) per $0 < x < 1$ e $x > 1$ mentre $f'(x) < 0$ (f decrescente) per $-1 < x < 0$ e $x < -1$. In $(0,1)$ c'è un minimo relativo (e assoluto). La funzione non ammette massimi relativi (e assoluti).

• Eventuali asintoti. Poichè $f(x) = x^2+1$ per $|x| > 1$, f non ammette asintoti per $x \to \pm\infty$.

Esercizio 2. Numeratore $f(x)$.

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \Rightarrow 2\cosh x = 2 + x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \Rightarrow \sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

Conseguentemente

$$f(x) = \left(2 + x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4)\right) - x^4 - 2 - \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) = -\frac{7}{12}x^4 + o(x^4)$$

Denominatore $g(x)$. Da

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{e} \quad \sinh x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

si ottiene che

$$(\sin x - \sinh x)^2 = \left(-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)^2 = \frac{1}{9}x^6 + o(x^6)$$

E quindi

$$g(x) = 2x^4 + o(x^4) + \frac{1}{9}x^6 + o(x^6) = 2x^4 + o(x^4)$$

Possiamo così concludere:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{7}{12}x^4 + o(x^4)}{2x^4 + o(x^4)} \overset{P.S.i.}{=} -\frac{7}{24}$$

Aggiungiamo il parametro $\alpha > 0$. In tal caso

$$g(x) = 2x^\alpha + o(x^\alpha) + \frac{1}{9}x^6 + o(x^6) = \begin{cases} 2x^\alpha + o(x^\alpha) & \text{se } 0 < \alpha < 6 \\ \frac{19}{9}x^6 + o(x^6) & \text{se } \alpha = 6 \\ \frac{1}{9}x^6 + o(x^6) & \text{se } \alpha > 6 \end{cases}$$

Conseguentemente:

- Sia $0 < \alpha < 6$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{7}{12}x^4 + o(x^4)}{2x^\alpha + o(x^\alpha)} \overset{P.S.i.}{=} -\frac{7}{24} \lim_{x\to 0^+} x^{4-\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < \alpha < 4 \\ -\frac{7}{24} & \text{se } \alpha = 4 \\ -\infty & \text{se } 4 < \alpha < 6 \end{cases}$$

- <u>Sia $\alpha = 6$</u>.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{7}{12}x^4 + o(x^4)}{\frac{19}{9}x^6 + o(x^6)} \overset{P.S.i.}{=} -\infty$$

- <u>Sia $\alpha > 6$</u>.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{7}{12}x^4 + o(x^4)}{\frac{1}{9}x^6 + o(x^6)} \overset{P.S.i.}{=} -\infty$$

Esercizio 3. La formula è verificata per $n = 1$. Supposta vera per $n-1$ (ipotesi induttiva):

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n-1}{2(n-1)+1} = \frac{n-1}{2n-1}, \tag{1}$$

verifichiamola per n. Si ha

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4k^2-1} + \frac{1}{4n^2-1} \overset{\text{per (1)}}{=} \frac{n-1}{2n-1} + \frac{1}{4n^2-1} = \ldots = \frac{n}{2n+1}.$$

Quindi, per il Principio di induzione, la formula vale per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infine, ricordando la definizione di somma di un serie ($s := \lim_{n\to+\infty} s_n$), nel nostro caso occorre valutare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

La serie proposta è quindi convergente a $1/2$.

Esercizio 4. Le condizioni da imporre affinchè f sia definita sono

$$\begin{cases} x^2 - 4 \neq 0 \iff x \neq \pm 2 \\ \left|\frac{2x-1}{1-x}\right| \leq 1 \quad \text{e} \quad x \neq 1 \\ 3x - 2 \neq 0 \iff x \neq 2/3 \end{cases}$$

Si ha

$$\left|\frac{2x-1}{1-x}\right| \leq 1 \iff |2x-1| \leq |1-x| \iff (2x-1)^2 \leq (1-x)^2$$

$$\iff x(3x-2) \leq 0 \iff 0 \leq x \leq 2/3$$

Conseguentemente, l'insieme di definizione di f risulta l'intervallo $[0, 2/3[$.