
ANALISI MATEMATICA 1

Ingegneria dell'Energia, cognomi A-O

Secondo compitino - Venerdì 20 gennaio 2017

TEMA 1

Esercizio 1. [6 p.ti] Calcolare, al variare di $\alpha > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{x^2} - \sqrt{x^3+3} + 5^x}{(x^\alpha)^{x^2} - \log x + e^{5x}}$$

Esercizio 2. [6 p.ti] Sia

$$F(x) = (x+1)\int_2^x \frac{\log|t-3|}{\arctan t}dt$$

(*a*) Trovare l'insieme di definizione D_F di F e calcolare $F'(x)$ [2 p.ti].

(*b*) Scrivere la formula di Taylor di punto iniziale $x = 2$ fino al termine di secondo grado [3 p.ti].

(*c*) Dedurre l'ordine di infinitesimo di F per $x \to 2$ rispetto a $x - 2$ [1 p.to].

Esercizio 3. [7 p.ti] Risolvere il problema di Cauchy

$$y' + \frac{\cos x}{2\sin x - 1}y = \cos x, \qquad y(\pi) = 4$$

[6 p.ti]. Stabilire il massimo intorno di $x = \pi$ nel quale la soluzione trovata è definita [1 p.to].

Domanda 1. [3 p.ti] Cosa significa che una funzione $f \in C^1(\mathbb{R})$? [1 p.to]
Sia f la funzione, dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$, così definita

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{se } x \le 0 \\ xe^{ax} + a^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Trovare il valore di $a \in \mathbb{R}$ per cui $f \in C^1(\mathbb{R})$ e si abbia inoltre $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ [2 p.ti].

PAG. SUCC. →

Domanda 2. [3 p.ti] Enunciare e dimostrare il teorema della media, mettendo in evidenza tutti i punti in cui si usa la continuità della funzione integranda.

Domanda 3. [5 p.ti] Dire cos'è una serie [1 p.to]. Spiegare in dettaglio cosa significa serie convergente, divergente e indeterminata [2 p.ti]. Dimostrare che la serie armonica diverge [2 p.ti].

N.B.
– Tutti i risultati devono essere accuratamente giustificati.
– La bella copia deve essere fatta sul foglio intestato e siglato. NON SI ACCETTANO BRUTTE COPIE.
– Il tempo a disposizione è di 2 ore e 45 minuti.

2° COMPITINO - TEMA 1 - EX 1

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{x^2}-\sqrt{x^3+3}+5^x}{(x^\alpha)^{x^2}-\log x+e^{5x}} \qquad \alpha>0.$$

$\sqrt{x^3+3}$ ha ordine $3/2$ rispetto a x per $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{x^2}}{5^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2\log x}}{e^{x\log 5}}=\lim_{x\to+\infty}e^{x^2\log x-x\log 5}=+\infty.$$

Quindi il numeratore è $x^{x^2}+o(x^{x^2})$

Passo al denominatore.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2)^{x^\alpha}}{e^{5x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2\log x^\alpha}}{e^{5x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{x^2\log(x^\alpha)-5x}=$$

$=+\infty.$

Quindi il denominatore è $(x^\alpha)^{x^2}+o\left[(x^\alpha)^{x^2}\right].$

Infine

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{x^2}+o(x^{x^2})}{(x^\alpha)^{x^2}+o((x^\alpha)^{x^2})} \underset{PSI}{=} \lim_{x\to+\infty} e^{x^2\log x-\alpha x^2\log x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^{x^2\log x(1-\alpha)}=\begin{cases}0 & \text{se } \alpha>1\\ 1 & \text{se } \alpha=1\\ +\infty & \text{se } 0<\alpha<1\end{cases}$$

2° COMPITINO - TEMA 1 - EX 2

Sia $F(x) = (x+1)\int_2^x \frac{\log|t-3|}{\operatorname{arctg} t}\,dt$ a) trovare l'insieme di definizione I di $F(x)$ e calcolare $F'(x)$ b) scrivere la formula di Taylor di punto iniziale $x=2$ fino al termine di II grado c) trovare l'ordine di infinitesimo di $F(x)$ per $x \to 2$ rispetto ad $x-2$

1) controllato punti 5

$f(t) = \frac{\log|t-3|}{\operatorname{arctg} t}$ è continua per $t \neq 0$ e $t \neq 3$ perciò $f(x)$ è continua in $[2,x]$ o $[x,2]$ solo se $0<x<3$ pertanto $F(x)$ è definita in $]0,3[$ e si ha

$$F'(x) = \int_2^x \frac{\log|t-3|}{\operatorname{arctg} t}\,dt + \frac{(x+1)\cdot\log|x-3|}{\operatorname{arctg} x}$$

La formula di Taylor richiesta è

$$F(x) = F(2) + F'(2)(x-2) + \frac{F''(2)}{2!}(x-2)^2 + R_3(x)$$

Si ha $F(2)=0$ $F'(2)=0$ calcolo $F''(x)$

$$F''(x) = \frac{\log|x-3|}{\operatorname{arctg} x} + \frac{\left[\log|x-3| + \frac{(x+1)}{x-3}\right]\operatorname{arctg} x - \frac{1}{1+x^2}(x+1)\log|x-3|}{\operatorname{arctg}^2 x}$$

$F''(2) = -3/\operatorname{arctg} 2$ Pertanto

$$F(x) = -\frac{3}{2\operatorname{arctg} 2}(x-2)^2 + R_3(x) \quad \text{con } R_3(x) = o[(x-2)^2]$$

Da ciò si vede che $F(x)$ è un infinitesimo di II ordine rispetto a $x-2$ con parte principale $-\frac{3}{2\operatorname{arctg} 2}(x-2)^2$

2° COMPITINO - TEMA 1 - EX 3

Risolvere il problema di Cauchy

$$y' + \frac{\cos x}{2\sin x - 1}\, y = \cos x \qquad y(\pi) = 4$$

Si chiede in quali strisce vale il teorema di esistenza ed unicità di Cauchy in grande, si chiede quale è il massimo intorno di $x = \pi$ nel quale si può affermare, per il teorema di Cauchy, che esiste ed è unica la soluzione tale che $y(\pi) = 4$ Punti 7 = 5+2

Posto $P(x) = \int \frac{\cos x}{2\sin x - 1}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\cos x}{2\sin x - 1}\, dx =$

$= \frac{1}{2}\log|2\sin x - 1|$ si ha

$$y = e^{-P(x)}\left[\int q(x)\, e^{P(x)}\, dx + c\right] =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\log|2\sin x - 1|}\left[\int \cos x\, e^{\log|2\sin x - 1|^{1/2}}\, dx + c\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|2\sin x - 1|}}\left[\int \cos x \sqrt{|2\sin x - 1|}\, dx + c\right]$$

poiché in $I(\pi)$ $2\sin x - 1 < 0$ si ha

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\sin x}}\left[\int \cos x \sqrt{1 - 2\sin x}\, dx + c\right]$$

Si ha

$\int \cos x \sqrt{1 - 2\sin x}\, dx = -\frac{1}{2}\int -2\cos x\sqrt{1 - 2\sin x}\, dx$ = posto $1 - 2\sin x = t$

$$= -\frac{1}{2}\int t^{1/2}\, dt = -\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\, t^{3/2} = -\frac{1}{3}(1 - 2\sin x)^{3/2}$$

Perciò

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\sin x}}\left[-\frac{1}{3}(1 - 2\sin x)^{3/2} + c\right] = -\frac{1}{3}(1 - 2\sin x) + \frac{c}{\sqrt{1 - 2\sin x}}$$

$y(\pi) = 4 = -\frac{1}{3} + c \Rightarrow c = 4 + \frac{1}{3} = \frac{13}{3}$ da cui la soluzione è

L'intorno è $]\frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi[$

$$y = -\frac{1}{3}(1 - 2\sin x) + \frac{13}{3}\,\frac{1}{\sqrt{1 - 2\sin x}}$$

2° COMPITINO - TEMA 1 - DOMANDA 1

$f(x)$ è continua in $x=0$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to 0^+} x\, e^{ax} + a^2 = a^2 = f(0) = 1$

cioè $\Leftrightarrow$ $a = \pm 1$.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} & x < 0 \\ e^{ax} + ax\,e^{ax} & x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1 = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{(1-x)^2}$$

Quindi per $a = \pm 1$ $f(x)$ risulta continua e derivabile in $\mathbb{R}$.

il limite è verificato per $a = -1$.

ANALISI MATEMATICA 1

Ingegneria dell'Energia, cognomi A-O

Secondo compitino - Venerdì 20 gennaio 2017

TEMA 2

Esercizio 1. [7 p.ti] Data la funzione

$$\begin{cases} (1+x^2)\cos x & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{e^{\alpha x^2} - 1 - \alpha x^2 + x\log^2(\cos x)}{x^2 - x\sin x + \sinh^5 x} & \text{se } 0 < x < \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

(*a*) Calcolare, al variare di $\alpha > 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ [6 p.ti].

(*b*) Stabilire per quali valori di $\alpha > 0$ $f(x)$ è continua in $\left]-\infty, \frac{\pi}{3}\right[$ [1 p.to].

Esercizio 2. [5 p.ti] Sia

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} \frac{1}{\sqrt{1-\cos^3 t}} dt + 3$$

(*a*) Trovare l'insieme di definizione D_F di F [1 p.to].

(*b*) Dimostrare che F è invertibile in D_F [2 p.ti].

(*c*) Detta G l'inversa di F, calcolare l'equazione della retta tangente al grafico di G nel punto $(3, G(3))$ [2 p.ti].

Esercizio 3. [6 p.ti] Data la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n - 3n}{\sinh(n+2)} x^n \qquad x \in \mathbb{R},$$

si dica per quali valori $x \in \mathbb{R}$ converge assolutamente, per quali non può convergere e se esistono valori $x \in \mathbb{R}$ per i quali la serie converge ma non assolutamente.

PAG. SUCC. →

Domanda 1. [3 p.ti] Cosa significa che una funzione $f \in C^1(\mathbb{R})$? [1 p.to]
Sia f la funzione, dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$, così definita

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{se } x \leq 0 \\ xe^{-ax} + a^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Trovare il valore di $a \in \mathbb{R}$ per cui $f \in C^1(\mathbb{R})$ e si abbia inoltre $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ [2 p.ti].

Domanda 2. [5 p.ti] Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale, mettendo in evidenza tutti i punti in cui si usa la continuità della funzione integranda [3 p.ti].
Sia $f \in C^0(]a, b])$. Cosa vuol dire che f è integrabile in senso generalizzato in $]a, b]$? [1 p.to]
Fornire un esempio di funzione integrabile in senso generalizzato in $]0, 1]$ [1 p.to].

Domanda 3. [4 p.ti] Dare la definizione di soluzione dell'equazione differenziale $y'' = f(x, y, y')$ [1 p.to].
Stabilire se

$$\varphi(x) = e^{\frac{x^4}{4}+x}$$

è soluzione dell'equazione differenziale

$$yy'' - (y')^2 - 3x^2y^2 = 0$$

[2 p.ti]. In caso affermativo, dire su quale insieme [1 p.to].

N.B.
– Tutti i risultati devono essere accuratamente giustificati.
– La bella copia deve essere fatta sul foglio intestato e siglato. NON SI ACCETTANO BRUTTE COPIE.
– Il tempo a disposizione è di 2 ore e 45 minuti.

2° COMPITINO - TEMA 2 - EX 1

$$e^t - 1 = t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$e^{\alpha x^2} - 1 = \alpha x^2 + \frac{\alpha^2 x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\log(\cos x) = \log(1 + \cos x - 1) = (\cos x - 1) - \frac{(\cos x - 1)^2}{2} +$$

$$\log(1+t) = t + o(t)$$

$$+ o[(\cos x - 1)^2] =$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right) - \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{2} + o(x^4) =$$

$$= -\frac{x^2}{2} + x^4\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{8}\right) + o(x^4) = \frac{-x^2}{2} + x^4\left(-\frac{1}{12}\right) + o(x^4)$$

Quindi il numeratore è

$$\cancel{\alpha x^2} + \frac{\alpha^2 x^4}{2} + o(x^4) - \cancel{\alpha x^2} + x\left[\frac{x^4}{4} + o(x^4)\right] =$$

$$= \frac{\alpha^2 x^4}{2} + o(x^4)$$

Il denominatore, invece:

$$x^2 - x\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) + x^5 + o(x^5) = \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

Allora

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f}{g} = \lim_{x \to +0} \frac{\frac{\alpha^2 x^4}{2} + o(x^4)}{\frac{x^4}{6} + o(x^4)} = 3\alpha^2 = 1 \iff \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Psi

$(\alpha > 0)$

2° COMPITINO - TEMA 2 - EX. 2

Sia $F(x) = \int_{-\pi}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-\cos^3 t}} + 3$ a) trovarne l'insieme di definizione I b) dimostrare che $F(x)$ è invertibile in I c) detta g l'inversa di F scrivere l'equazione della tangente al grafico di g nel punto $(3, g(3))$

punti 5

$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^3 t}}$ è definita per $1-\cos^3 t > 0$ cioè $\cos^3 t < 1$

quindi $t \neq 2K\pi$ $K \in \mathbb{Z}$ $f(t)$ è continua nell'intervallo $[-\pi, x]$ o $[x, -\pi]$ se $-2\pi < x < 0$ quindi $I =]-2\pi, 0[$

Perciò $F(x)$ è definita in I e si ha $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^3 x}} > 0$ in I quindi $F(x)$ è continua crescente in senso stretto in I quindi è invertibile e la sua inversa risulta continua e crescente in senso stretto in $F(]-2\pi, 0[)$

Si ha inoltre $F(-\pi) = 3 \Rightarrow -\pi = g(3)$ e $g'(3) = \frac{1}{F'(-\pi)}$ dove $F'(-\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

L'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto $(3, g(3))$ è

$$y - g(3) = g'(3)(x-3) \quad \text{cioè} \quad y + \pi = \sqrt{2}(x-3)$$

2° COMPITINO - TEMA 2 - EX 3

Uso il criterio del rapporto per la conv. assoluta.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2^{n+1}-3(n+1)}{\sinh(n+3)}\cdot\frac{\sinh(n+2)}{2^n-3n}\right|\cdot|x| =$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{2^n}\left[2-\frac{3(n+1)}{2^n}\right]}{\cancel{2^n}\left[1-\frac{3n}{2^n}\right]}\cdot\frac{e^{n+2}-e^{-n-2}}{e^{n+3}-e^{-n-3}}\,|x| =$$

$$=\lim_{n\to+\infty} 2|x|\,\frac{\cancel{e^{n+2}}\left[1-\frac{e^{-n-2}}{e^{n+2}}\right]}{\cancel{e^{n+3}}\left[1-\frac{e^{-n-3}}{e^{n+3}}\right]} = \frac{2|x|}{e}$$

Quindi: $\frac{2}{e}|x|<1$ cioè $|x|<\frac{e}{2}$ conv. assolut. $\Rightarrow$ sempl.

$\frac{2}{e}|x|>1$ cioè $|x|>\frac{e}{2}$ diverge assolut. e non può convergere.

$\boxed{x=\frac{e}{2}}$ La serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n-3n}{\sinh(n+2)}\left(\frac{e}{2}\right)^n$$

Controllo se il termine generale è infinitesimo.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n-3n}{\frac{e^{n+2}-e^{-n-2}}{2}}\cdot\frac{e^n}{2^n} =$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{2^n}\left[1-\frac{3n}{2^n}\right]}{\cancel{e^n}\left[e^2-\frac{e^{-n-2}}{e^n}\right]}\cdot 2\cdot\frac{\cancel{e^n}}{\cancel{2^n}} = \frac{2}{e^2}\neq 0.$$

Quindi non è soddisfatta la cond. necessaria per la convergenza e la serie diverge a $+\infty$ (essendo a termini definitivamente positivi.

$\boxed{x=-\frac{e}{2}}$ poiché $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to+\infty}|a_n| = 0$

e termine generale non è infinitesimo $\Rightarrow$ la serie <u>non</u> può convergere.

ANALISI MATEMATICA 1

Ingegneria dell'Energia, cognomi A-O

Primo appello - Venerdì 20 gennaio 2017

TEMA 1

Esercizio 1. [6 p.ti] Sia

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2|x+1|} & \text{se } x \geq -2 \\ -2x - 2 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

Studiare continuità e derivabilità, ricercare i punti di massimo e di minimo relativi ed assoluti ed eventuali asintoti, abbozzare il grafico. *N.B. Non è richiesto lo studio di* $f''(x)$.

Esercizio 2. [6 p.ti] Calcolare, al variare di $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{x^2} - \sqrt{x^3+3} + 5^x}{(x^\alpha)^{x^2} - \log x + e^{5x}}$$

Esercizio 3. [6 p.ti] Sia

$$F(x) = (x+1) \int_2^x \frac{\log|t-3|}{\arctan t} dt$$

(*a*) Trovare l'insieme di definizione D_F di F e calcolare $F'(x)$ [2 p.ti].

(*b*) Scrivere la formula di Taylor di punto iniziale $x = 2$ fino al termine di secondo grado [3 p.ti].

(*c*) Dedurre l'ordine di infinitesimo di F per $x \to 2$ rispetto a $x - 2$ [1 p.to].

Domanda 1. [3 p.ti] Dire cos'è una successione [1 p.to]. Enunciare e dimostrare il teorema della permanenza del segno per le successioni [2 p.ti].

Domanda 2. [3 p.ti] Enunciare e dimostrare il teorema della media, mettendo in evidenza tutti i punti in cui si usa la continuità della funzione integranda.

PAG. SUCC. →

Domanda 3. [6 p.ti] Dire cos'è una serie [1 p.ti]. Spiegare in dettaglio cosa significa serie convergente, divergente e indeterminata [2 p.ti]. Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n - 3n}{\sinh(n+2)}$$

[3 p.ti].

N.B.

– Tutti i risultati devono essere accuratamente giustificati.
– La bella copia deve essere fatta sul foglio intestato e siglato. NON SI ACCETTANO BRUTTE COPIE.
– Il tempo a disposizione è di 2 ore e 45 minuti.

PRIMO APPELLO - TEMA 1 - EX 1

Sia
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2|x+1|} & x\geq -2\\ -2x-2 & x<-2\end{cases}$$

Studiare i punti di non derivabilità, ricercare i punti di massimo e minimo relativo e gli eventuali asintoti, abbozzare il grafico. Non si studi $f''(x)$

Si ha $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-}(-2x-2) = 2 = f(-2)$

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+}\sqrt{x^2|x+1|} = 2$ $f(x)$ è continua per $x=-2$

ed anzi in $\mathbb{R}$ perchè composta di funzioni continue. Si ha

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2|x+1|} = +\infty$ $\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\sqrt{|x+1|} = +\infty$

Non esiste asintoto obliquo per $x\to +\infty$

Si ha $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}(-2x-2) = +\infty$ poichè $y=-2x-2$

è l'equazione di una retta che è asintoto per $x\to -\infty$

Si ha
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2(x+1)} & x\geq -1\\ \sqrt{-x^2(x+1)} & -2\leq x<-1\\ -2x-2 & x<-2\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^2(x+1)}}=\dfrac{x(3x+2)}{2|x|\sqrt{x+1}} & x>-1 \quad x\neq 0\\[2ex] -\dfrac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^2|x+1|}}=\dfrac{-x(3x+2)}{-x\cdot 2\sqrt{|x+1|}} & -2<x<-1\\[2ex] -2 & x<-2\end{cases}$$

Si ha $\lim_{x\to 0^+} f' = \lim_{x\to 0^+}\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}} = 1$

$\lim_{x\to 0^-} f' = \lim_{x\to 0^-}\frac{3x+2}{-2\sqrt{x+1}} = -\frac{2}{2} = -1$ $\nexists f'(0)$ per $x=0$ vi è punto angoloso

$\lim_{x \to -1^+} f' = \lim_{x \to -1^+} \frac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^2(x+1)}} = +\infty \qquad \lim_{x \to -1^-} f' = \lim_{x \to -1} \frac{-(3x^2+2x)}{2\sqrt{x^2|x+1|}} = -\infty$

per $x=-1$ vi è una cuspide $\quad f(-1)=0 \quad f(0)=0$

Per $x > -1 \quad f' > 0 \Rightarrow x(3x+2) > 0 \Rightarrow (x > 0) \vee \left(-1 < x < -\frac{2}{3}\right)$

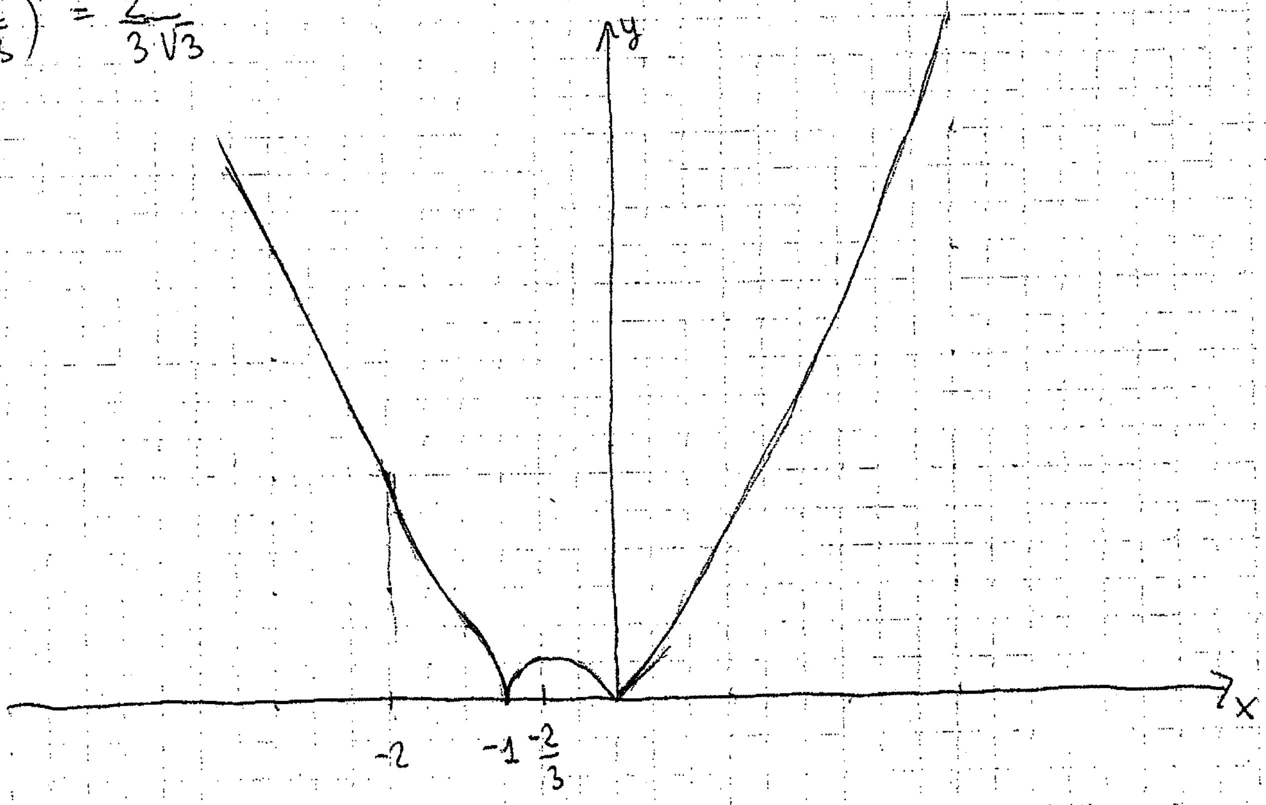
$f' < 0$ per $-\frac{2}{3} < x < 0$

Per $-2 < x < -1 \quad f' < 0 \qquad$ Per $x < -2 \quad f' < 0$

$\lim_{x \to -2^-} f' = -2 = \lim_{x \to -2^+} f' = \lim_{x \to -2} \frac{3x+2}{2\sqrt{|x+1|}} = -2 \quad \exists f'(-2) = -2$

Per $x=-1$, $x=0$ punto di minimo per $x = -\frac{2}{3}$ punto di max

$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$



ANALISI MATEMATICA 1

Ingegneria dell'Energia, cognomi A-O

Primo appello - Venerdì 20 gennaio 2017

TEMA 2

Esercizio 1. [5 p.ti] Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.
Cosa significa che A è limitato? [1 p.to]
Cosa sono un maggiorante ed un minorante di A? [1 p.to]
Dato l'insieme

min = inf = 0
sup = max = 3/2

$$A = \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \; : \; n \in \mathbb{N} \right\},$$

determinare estremo inferiore, estremo superiore e –se esistono– minimo e massimo di A [3 p.ti].

Esercizio 2. [7 p.ti] Data la funzione

$$\begin{cases} (1+x^2)\cos x & \text{se } x \leq 0 \\ \\ \dfrac{e^{\alpha x^2} - 1 - \alpha x^2 + x\log^2(\cos x)}{x^2 - x\sin x + \sinh^5 x} & \text{se } 0 < x < \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

(*a*) Calcolare, al variare di $\alpha > 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ [6 p.ti].

(*b*) Stabilire per quali valori di $\alpha > 0$ $f(x)$ è continua in $\left]-\infty, \frac{\pi}{3}\right[$ [1 p.to].

Esercizio 3. [6 p.ti] Data la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n - 3n}{\sinh(n+2)} x^n \qquad x \in \mathbb{R},$$

si dica per quali valori $x \in \mathbb{R}$ converge assolutamente, per quali non può convergere e se esistono valori $x \in \mathbb{R}$ per i quali la serie converge ma non assolutamente.

PAG. SUCC. →

Domanda 1. [3 p.ti] Sia f la funzione, dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$, così definita

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{se } x \leq 0 \\ xe^{-ax} + a^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Trovare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui f è derivabile in $\mathbb{R}$ [2 p.ti]. In tal caso, la f risulta anche continua in $\mathbb{R}$? Perchè? [1 p.to].

Domanda 2. [5 p.ti] Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale, mettendo in evidenza tutti i punti in cui si usa la continuità della funzione integranda [3 p.ti].
Sia $f \in C^0(]a,b])$. Cosa vuol dire che f è integrabile in senso generalizzato in $]a,b]$? [1 p.to]
Fornire un esempio di funzione integrabile in senso generalizzato in $]0,1]$ [1 p.to].

Domanda 3. [4 p.ti] Dire cos'è una successione [1 p.to]. Dimostrare che se

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = b,$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = a + b$$

[3 p.ti].

N.B.
– Tutti i risultati devono essere accuratamente giustificati.
– La bella copia deve essere fatta sul foglio intestato e siglato. NON SI ACCETTANO BRUTTE COPIE.
– Il tempo a disposizione è di 2 ore e 45 minuti.