

# Insiemi linearmente ordinati ed insiemi cantoriani

## Introduzione

Quando si presentano i numeri reali, alle scuole superiori o al primo anno di università, giocano un ruolo molto importante le proprietà dell'ordine. L'impiego di tali proprietà si inquadra nella teoria degli spazi linearmente ordinati.

È interessante parlare brevemente di questi spazi, per vedere quali delle dimostrazioni che si fanno su  $\mathbb{R}$  hanno in realtà un carattere più generale. In particolare le nozioni di connessione e di compattezza sono collegate a proprietà elementari dell'ordine ed ogni spazio connesso separabile è omeomorfo a un intervallo della retta reale.

L'insieme degli allineamenti decimali, che si spiegano alla scuola media, ordinato in modo naturale con l'ordine lessicografico, ha proprietà patologiche che lo rendono molto diverso da  $\mathbb{R}$ ; esso è detto *cubo di Cantor* ed è molto amato dai topologi perché costituisce un "esempio universale".

Volendo, si può cominciare la lettura dal terzo paragrafo, sbirciando ogni tanto i primi due. Per le nozioni di topologia non spiegate, si rimanda a [1].

I disegni sono di G. Artico, che ringrazio per aver discusso con me molti dei problemi esposti.

## 1 Insiemi

Sia  $X$  un insieme con almeno due punti. Un ordine lineare su  $X$  è una relazione, che indicheremo con  $<$ , con le seguenti proprietà:

- (OL1) se  $x < y$  e  $y < z$  allora  $x < z$  (transitiva);
- (OL2) se  $x < y$ , allora  $y < x$  non può valere (antisimmetrica);
- (OL3) se  $x \neq y$ , allora vale una fra  $x < y$  e  $y < x$  (totale).

La (OL2) dice in particolare che  $x < x$  è sempre falsa.

Con il simbolo  $x \leq y$  intendiamo dire che  $x < y$  oppure  $x = y$ . La relazione  $\leq$  verifica (OL1), mentre (OL2) e (OL3) sono sostituite da una forma leggermente più debole. Un insieme munito di un ordine lineare si chiama *insieme linearmente ordinato*.

Diamo per note le nozioni di minorante, maggiorante, minimo, massimo, estremo inferiore, estremo superiore, funzione monotona (in senso stretto e in senso lato).

Una coppia  $(A, B)$  di sottoinsiemi non vuoti di  $X$  tale che  $A \cup B = X$  e se  $a \in A$  e  $b \in B$  allora  $a < b$ , si chiama un *taglio* di  $X$ .  $A$  è detta la *sezione inferiore*

del taglio e  $B$  la *sezione superiore*. Per ogni taglio vale esattamente una delle seguenti quattro condizioni:

- 1 la sezione inferiore ha massimo e la sezione superiore ha minimo;
- 2 la sezione inferiore ha massimo e la sezione superiore non ha minimo;
- 3 la sezione inferiore non ha massimo e la sezione superiore ha minimo;
- 4 la sezione inferiore non ha massimo e la sezione superiore non ha minimo.

Se è soddisfatta la 1, diciamo che il taglio è un *salto*: si osservi che ogni salto è individuato da una coppia di punti consecutivi (nel senso che non ci sono altri punti compresi fra essi). Se vale la 4, diciamo che il taglio è una *lacuna*.

Se  $X$  è privo di salti si dice *densamente ordinato*. Se  $X$  è privo di lacune si dice *completo*. La seguente proposizione caratterizza gli insiemi completi (per la dimostrazione e la costruzione di un completamento, si veda ad esempio [5, appendice B]).

**Proposizione 1** *Se  $X$  è un insieme linearmente ordinato le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (i)  $X$  non ha lacune;
- (ii) ogni sottoinsieme non vuoto superiormente limitato ha estremo superiore;
- (iii) ogni sottoinsieme non vuoto inferiormente limitato ha estremo inferiore.

**Esempi.** Vediamo alcuni esempi significativi.

1. La retta razionale, cioè l'insieme  $\mathbb{Q}$  dei numeri razionali munito dell'ordine usuale, è un insieme densamente ordinato ma non completo. Le lacune sono in corrispondenza biunivoca con gli irrazionali della retta reale.
2. La *retta lunga* è il piano cartesiano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  munito dell'ordine *lessicografico*, che è così definito: se  $p = (x_1, y_1)$  e  $q = (x_2, y_2)$ , poniamo  $p < q$  se  $x_1 < x_2$  oppure  $x_1 = x_2$  e  $y_1 < y_2$ . È ancora un insieme densamente ordinato, ma non completo. Le sezioni inferiori delle lacune sono tutti e soli i sottoinsiemi del tipo  $A = \{(x, y) : x < x_0\}$  oppure del tipo  $A = \{(x, y) : x \leq x_0\}$ , per qualche  $x_0 \in \mathbb{R}$ .
3. L'*intervallo unitario*  $I = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$  è completo, densamente ordinato e ha massimo e minimo.
4.  $\mathbb{L}$  è il quadrato  $I \times I$  con l'ordine lessicografico. È densamente ordinato ed ha massimo e minimo. Dimostriamo che esso è anche completo. Sia  $S$  un sottoinsieme non vuoto di  $\mathbb{L}$  e sia  $x_0$  l'estremo superiore delle ascisse di  $S$ . Se  $S$  contiene un punto di ascissa  $x_0$ , l'estremo superiore di  $S$  è il punto  $(x_0, y_0)$ , ove  $y_0$  è l'estremo superiore delle ordinate dei punti di  $S$  di ascissa  $x_0$ . Se invece  $S$  non contiene punti di ascissa  $x_0$ , non è difficile verificare che l'estremo superiore di  $S$  è  $(x_0, 0)$ .

5. È facile costruire esempi pieni di salti: ad esempio,  $\mathbb{Z}$  oppure l'unione di una famiglia di intervalli chiusi di  $\mathbb{R}$  a due a due disgiunti.
6. L'insieme delle sequenze *binarie*  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$ , dove ogni termine  $c_n$  è la cifra 0 oppure la cifra 1, si chiama *cubo di Cantor* e si indica con il simbolo  $\{0, 1\}^\omega$ . Poniamo  $c < d$  se, detto  $n$  il minimo indice in cui  $c$  e  $d$  differiscono, si ha  $c_n < d_n$ : questo è ancora l'ordine lessicografico. Analoghi insiemi possono essere costruiti prendendo come insieme di cifre  $\{0, 1, 2\}$  (sequenze *triadiche*) oppure  $\{0, 1, \dots, 9\}$  (sequenze *decimali*).

Studiamo le proprietà del cubo di Cantor, ordinato lessicograficamente, lavorando per esempio sull'insieme delle sequenze triadiche  $T = \{0, 1, 2\}^\omega$  (le stesse conclusioni valgono per gli altri cubi).

- $T$  ha minimo (la sequenza costantemente uguale a 0) e massimo (la sequenza costantemente uguale a 2).
- $T$  è privo di lacune. Basta provare che ogni sottoinsieme non vuoto  $S$  ha estremo superiore. Sia  $c_1$  la massima fra le cifre che sono prima coordinata degli elementi di  $S$ . Sia  $S_1$  il sottoinsieme di  $S$  costituito dagli elementi che hanno prima coordinata  $c_1$ . Sia ora  $c_2$  la massima fra le cifre che sono seconda coordinata degli elementi di  $S_1$ . Per induzione, se  $c_n$  ed  $S_n$  sono definiti, sia  $c_{n+1}$  la massima fra le cifre che sono  $n+1$ -esima coordinata degli elementi di  $S_n$  e sia  $S_{n+1}$  l'insieme degli elementi di  $S_n$  che hanno  $n+1$ -esima coordinata uguale a  $c_{n+1}$ . È facile verificare che la sequenza  $(c_1, c_2, \dots)$  così costruita è l'estremo superiore di  $S$ .
- I salti di  $T$  sono tutti e soli quelli individuati da coppie di punti del tipo:

$$\alpha = (c_1, c_2, \dots, c_n - 1, 2, 2, 2, \dots), \quad \beta = (c_1, c_2, \dots, c_n, 0, 0, 0, \dots),$$

ove la cifra  $c_n$  è diversa da 0.

Se un punto  $\gamma$  è compreso fra  $\alpha$  e  $\beta$ , deve superare  $\alpha$  in una coordinata precedente  $n+1$  ed essere inferiore a  $\beta$  in una coordinata precedente  $n+1$ . Poiché le coordinate di  $\alpha$  e  $\beta$  prima della  $n+1$ -esima sono coincidenti o consecutive, un tale  $\gamma$  non può esistere e quindi  $\alpha, \beta$  individuano un salto.

Per vedere che i salti sono tutti di questo tipo, basta provare che se  $(A, B)$  è un taglio, con  $A$  per esempio che ammette massimo  $\alpha$ , se  $\alpha$  non termina con un 2 periodico, allora  $B$  non ha minimo. Sia  $J$  l'insieme infinito di indici su cui le coordinate di  $\alpha$  sono minori di 2. Per ogni  $j \in J$ , sia  $b^j$  l'elemento di  $T$  che coincide con  $\alpha$  su tutte le coordinate minori di  $j$ , che ha 2 sulla coordinata  $j$ -esima e 0 sulle coordinate maggiori di  $j$ . Poiché  $b^j > \alpha$ , abbiamo che  $b^j \in B$ . D'altro canto è facile vedere che l'estremo inferiore dell'insieme  $\{b^j : j \in J\}$  è  $\alpha$  (che quindi coincide anche con l'estremo inferiore di  $B$ ). Pertanto  $B$  non ha minimo.

## 2 Topologia dell'ordine

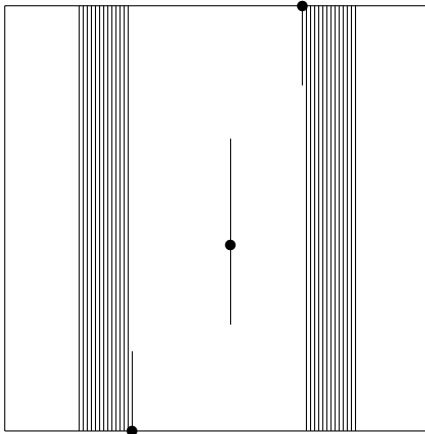
Siano  $a, b$  punti di  $X$ , con  $a < b$ . Noi diremo *intervalli aperti* di  $X$  gli insiemi del tipo:

$$]a, b[ = \{x : a < x < b\}, \quad ] \leftarrow, a[ = \{x : x < a\}, \quad ]a, \rightarrow [ = \{x : x > a\}$$

Un sottoinsieme  $E$  di  $X$  si dice *aperto* nella topologia dell'ordine se è un'unione di intervalli aperti (cioè per ogni  $x \in E$  esiste un intervallo aperto contenente  $x$  e contenuto in  $E$ ). È facile verificare che un'unione arbitraria di aperti è un aperto e che un'intersezione finita di aperti è ancora un aperto. Inoltre gli intervalli aperti contenenti un punto formano un sistema fondamentale di intorni di quel punto. Un punto  $x \in X$  si dice *di chiusura* per un sottoinsieme  $F$  se ogni intorno di  $x$  contiene punti di  $F$ . Con  $\text{clos } F$  indicheremo l'insieme dei punti di chiusura per  $F$ : tale insieme è detto *la chiusura* di  $F$ . Un sottoinsieme si dice *chiuso* se coincide con la propria chiusura, o equivalentemente se il suo complementare è aperto. L'eventuale estremo superiore (o inferiore) di un sottoinsieme appartengono sempre alla chiusura del sottoinsieme. Un sottoinsieme  $Y \subseteq X$  si dice *denso* se la sua chiusura coincide con  $X$ , cioè se ogni intervallo aperto non vuoto di  $X$  contiene punti di  $Y$ .

Un insieme ordinato con la topologia dell'ordine si chiama *spazio ordinato*. È facile verificare che gli spazi ordinati sono di Hausdorff, cioè punti distinti ammettono intorni disgiunti. Nel 1940 G. Birkhoff ha dimostrato che ogni spazio ordinato è *normale*, cioè chiusi disgiunti sono contenuti in aperti disgiunti.

**Esempio.**

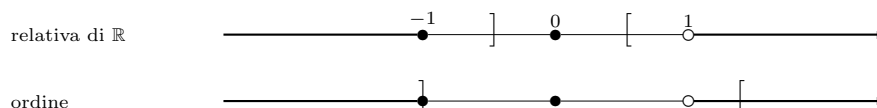


Vediamo com'è fatto un sistema fondamentale di intorni di un punto  $(x_0, y_0)$  nel quadrato lessicografico  $\mathbb{L}$ . Se  $0 < y_0 < 1$ , un sistema fondamentale è costituito dai segmenti del tipo  $\{(x_0, y) : a < y < b\}$  al variare di  $a$  e  $b$ , con  $0 < a < y_0 < b < 1$ . Se  $y_0 = 1$  e  $x_0 < 1$ , un intorno di base è costituito dall'unione di un *rettangolo destro*  $\{(x, y) : x_0 < x < x_0 + \delta\}$  con un segmento appeso al punto  $(x_0, 1)$ . Naturalmente per il punto  $(1, 1)$  basta il segmento appeso. In modo analogo si ragiona

per i punti del tipo  $(x_0, 0)$ , prendendo rettangoli sinistri uniti a segmenti piantati in  $(x_0, 0)$ .

Se  $Y \subseteq X$ , la topologia relativa<sup>1</sup> su  $Y$  è generata dall'intersezione con  $Y$  degli intervalli aperti con estremi in  $X$ . In genere essa è *più fine*<sup>2</sup> della topologia dell'ordine di  $Y$ , perché quest'ultima è generata dagli intervalli con estremi in  $Y$ .

**Esempio.** Sia  $Y \subseteq \mathbb{R}$ ,  $Y = ]\leftarrow, -1] \cup \{0\} \cup ]1, \rightarrow [$ .



Nella topologia relativa il punto 0 è *isolato* perché l'intervallo  $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$  interseca  $Y$  solo in 0.

Nella topologia dell'ordine il punto 0 appartiene alla chiusura di  $]1, \rightarrow [$  perché ogni intervallo aperto contenente 0 e con estremi in  $Y$  deve avere secondo estremo maggiore di 1.

Ricordiamo che un sottoinsieme  $Y$  di  $X$  si dice *convesso per l'ordine* se, dati  $a < b$  in  $Y$ , ogni punto  $x$  tale che  $a < x < b$  appartiene ad  $Y$ . Ovviamente ogni intervallo, con o senza estremi, è un sottoinsieme convesso. È facile dimostrare che sui convessi la topologia dell'ordine coincide con la topologia relativa.

## Connessione

Uno spazio topologico  $X$  si dice *connesso* se non può essere spezzato in un'unione di due sottoinsiemi aperti<sup>3</sup> non vuoti e disgiunti. Gli spazi connessi sono importanti, perché presentano proprietà di regolarità anche riguardo alle funzioni continue definite su di essi. Per quanto riguarda gli spazi ordinati, la connessione è fortemente legata a proprietà dell'ordine, come mostra il seguente teorema.

**Teorema 2** Per uno spazio ordinato  $X$  sono equivalenti:

- (i)  $X$  è connesso;
- (ii)  $X$  è privo di salti e di lacune.

**Dimostrazione.** (i)  $\Rightarrow$  (ii). Per assurdo, supponiamo che  $(A, B)$  sia un salto, con  $a$  massimo di  $A$  e  $b$  minimo di  $B$ . Allora  $A = ]\leftarrow, b[$  e  $B = ]a, \rightarrow [$  sono due intervalli aperti disgiunti non vuoti con unione  $X$  (contraddizione). Se invece  $(A, B)$  fosse una lacuna, allora si avrebbe  $A = \bigcup_{a \in A} ]\leftarrow, a[$  e  $B = \bigcup_{b \in B} ]b, \rightarrow [$ , com'è facile provare. Di nuovo  $A$  e  $B$  sarebbero due aperti che determinano la sconnessione di  $X$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Per assurdo, siano  $A$  e  $B$  due chiusi disgiunti e non vuoti di  $X$ , con  $A \cup B = X$ . Fissiamo  $a \in A$  e  $b \in B$  e supponiamo, ad esempio, che sia  $a < b$ .

<sup>1</sup>Se  $Y$  ha la topologia relativa, si dice che  $Y$  è un *sottospazio* di  $X$ .

<sup>2</sup>Cioè ha più aperti.

<sup>3</sup>O equivalentemente chiusi.

Poniamo  $A' = A \cap [a, b]$ . L'insieme  $A'$  è chiuso perché intersezione di due chiusi ed è superiormente limitato, perché  $b$  è un maggiorante. Poiché  $X$  è completo (privo di lacune),  $A'$  ammette estremo superiore, diciamo  $m$ . Poiché  $A'$  è chiuso,  $m$  appartiene ad  $A'$  e pertanto  $m < b$ . Di conseguenza  $]m, b] \subset B$ . Sia  $\xi$  l'estremo inferiore di  $]m, b]$ . Ovviamente è  $m \leq \xi$ . Poiché  $\xi \in \text{clos}]m, b] \subseteq \text{clos } B = B$ , si ha  $\xi \in B$ . Pertanto  $m < \xi$  ed abbiamo un salto (contraddizione).  $\square$

Per quanto riguarda gli esempi del §1, risultano connessi gli intervalli di  $\mathbb{R}$  e il quadrato lessicografico  $\mathbb{L}$  (esempio 4).

Da quanto abbiamo detto, è facile dedurre i fatti seguenti.

1. Un sottospazio  $Y$  di uno spazio linearmente ordinato è connesso per la topologia relativa se e solo se  $Y$  è convesso per l'ordine ed è privo di salti e di lacune (in tal caso la topologia relativa coincide con la topologia dell'ordine).
2. Se  $X$  è connesso e  $Y$  è un suo sottoinsieme convesso, allora  $Y$  è pure connesso. Di conseguenza, all'interno di un connesso, i connessi sono esattamente i convessi.

Vediamo ora qualche proprietà delle funzioni tra insiemi ordinati.

**Proposizione 3** *Se  $f : X \rightarrow Y$  è un isomorfismo per l'ordine, cioè una biiezione strettamente crescente, allora  $f$  è un omeomorfismo.*

**Dimostrazione.** Basta provare che  $f$  è continua, cioè che l'antiimmagine di una *semiretta* aperta è un insieme aperto. Poiché l'estremo di tale semiretta è un punto di  $f(X)$ , essa è, per esempio, del tipo  $S = ]f(x_0), \rightarrow [$ . Dato che  $x_0 < x \iff f(x_0) < f(x)$ , si ha che l'antiimmagine  $f^{-1}(S) = ]x_0, \rightarrow [$ , che è una semiretta aperta.

Con qualche avvertenza in più, si può provare che:

**Proposizione 4** *Se  $f$  è suriettiva e monotona in senso lato e  $Y$  è privo di salti, allora  $f$  è continua.*

**Dimostrazione.** Sia  $f$  crescente. Basta provare che, se  $f(x_1) > f(x_0)$ , esiste un intorno  $V$  di  $x_1$  tale che  $f(x) > f(x_0)$  per ogni  $x \in V$ . Poiché  $f(X)$  non ha salti, esiste  $x_2 \in X$  tale che  $f(x_0) < f(x_2) < f(x_1)$ . Si conclude prendendo  $V = ]x_2, \rightarrow [$ .  $\square$

Il seguente fatto sarà utile nel seguito.

**Proposizione 5** *Due insiemi numerabili linearmente ordinati privi di massimo e di minimo e privi di salti sono isomorfi per l'ordine.*

**Dimostrazione.** (Traccia.) Siano  $d_1, d_2, \dots, d_j, \dots$  e  $q_1, q_2, \dots, q_j, \dots$  numerazioni dei due insiemi. Definiamo  $f$  per induzione. Posto  $f(d_1) = q_1$ , sia  $j_2$  il minimo indice tale che  $q_{j_2}$  è, rispetto a  $f(d_1)$ , nello stesso ordine di  $d_2$  rispetto a  $d_1$ . Definiamo  $f(d_2) = q_{j_2}$ . Se  $f$  è definita in  $d_1, \dots, d_{k-1}$ , sia  $j_k$  il minimo indice tale che  $q_{j_k}$  è, rispetto a  $f(d_1), \dots, f(d_{k-1})$ , nello stesso ordine di  $d_k$  rispetto a  $d_1, \dots, d_{k-1}$ . Ponendo  $f(d_k) = q_{j_k}$ , la funzione  $f$  risulta strettamente crescente.

La verifica che i  $q_{j_k}$  effettivamente esistono e che  $f$  è suriettiva è un po' difficile e usa le ipotesi di densità dell'ordine e di non esistenza di punti estremi.  $\square$

Uno spazio topologico si dice *separabile* se contiene un sottoinsieme denso numerabile. Una conseguenza della proposizione precedente è il fatto che uno spazio linearmente ordinato connesso e separabile coincide in sostanza con un intervallo di  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 6** *Sia  $X$  connesso, separabile e privo di massimo e di minimo. Esiste allora un isomorfismo per l'ordine  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .*

**Dimostrazione.** Sia  $Y$  un sottoinsieme denso numerabile di  $X$ . Per la prop. 5, esiste un isomorfismo  $f$  da  $Y$  a  $\mathbb{Q}$ . Estendiamo  $f$  ai punti  $x \in X \setminus Y$  ponendo:

$$f(x) = \sup\{f(d) : d < x, d \in Y\}$$

È noioso, ma non difficile, verificare che  $f$  è l'isomorfismo richiesto.  $\square$

In genere, un omeomorfismo non è un isomorfismo per l'ordine. Tuttavia, se gli spazi sono connessi, ogni omeomorfismo è un isomorfismo per l'ordine, come risulta dalla seguente proposizione.

**Proposizione 7** *Se  $f : X \rightarrow Y$  è continua ed  $X$  è connesso, allora  $f$  è monotona.*

**Dimostrazione.** Ragionare come in [6, teor. 33.3], tenendo presente che le funzioni continue mandano connessi in connessi e che i sottoinsiemi connessi sono intervalli privi di salti e di lacune.  $\square$

## Compattezza

Una famiglia  $\mathcal{A}$  di sottoinsiemi aperti di  $X$  si dice *ricoprimento aperto* di  $X$  se l'unione dei suoi elementi,  $\cup \mathcal{A}$ , è uguale ad  $X$ . Un sottoinsieme di un ricoprimento che è esso stesso un ricoprimento è detto *sottoricoprimento*.

Uno spazio topologico di Hausdorff si dice *compatto* se da ogni ricoprimento si può estrarre un sottoricoprimento *finito*.

Si dice che una famiglia  $\mathcal{F}$  di chiusi non vuoti ha la *proprietà dell'intersezione finita* se, comunque presi un numero finito di elementi di  $\mathcal{F}$ , la loro intersezione è non vuota. Passando ai complementari e usando le formule di De Morgan, si vede che uno spazio topologico è compatto se e solo se ogni famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota. Poiché i sottoinsiemi chiusi di un chiuso  $G$  sono chiusi di  $X$ , abbiamo immediatamente che i sottoinsiemi chiusi di un compatto sono compatti. Se  $X$  è uno spazio ordinato compatto e  $G$  è chiuso in  $X$ , si ha che  $G$  è compatto anche nella topologia dell'ordine di  $G$  (ovviamente una topologia meno fine di una topologia compatta è compatta).

**Teorema 8** *Sia  $X$  uno spazio linearmente ordinato. Sono equivalenti:*

- (i)  $X$  è compatto;
- (ii)  $X$  ha massimo e minimo ed è privo di lacune;
- (iii) ogni sottoinsieme di  $X$  ha estremo superiore.

**Dimostrazione.** L'equivalenza di (ii) e (iii) è conseguenza immediata della prop. 1, tenendo presente che l'estremo superiore dell'insieme vuoto è il minimo.

(i)  $\Rightarrow$  (ii). La famiglia  $\mathcal{F} = \{[x, \rightarrow [ : x \in X\}$  ha la proprietà dell'intersezione finita e pertanto ha intersezione non vuota. Ma, se  $y \in \cap \mathcal{F}$ , si deve avere  $y \geq x$  per ogni  $x$ , e quindi  $X$  ha massimo  $y$ . Analogamente, con le semirette decrescenti, si prova che  $X$  ha minimo. Sia ora  $(A, B)$  un taglio, con  $B$  privo di minimo: dobbiamo provare che  $A$  ha massimo. Essendo  $B$  privo di minimo,  $B$  è un sottoinsieme aperto (è l'unione delle semirette aperte crescenti con estremo in  $B$ ). Pertanto  $A$  è chiuso e quindi compatto. Di conseguenza  $A$  ha massimo.

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Sia  $\mathcal{F}$  una famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita. Sia  $\mathcal{G}$  la famiglia di chiusi che si ottiene aggiungendo alla famiglia  $\mathcal{F}$  tutte le intersezioni finite di elementi di  $\mathcal{F}$ . Per ogni  $F \in \mathcal{G}$  sia  $b_F = \sup F = \max F$  e sia  $b = \inf\{b_F : F \in \mathcal{G}\}$ . Vogliamo provare che, per ogni  $G \in \mathcal{G}$ , si ha  $b \in \text{clos } G = G$  (di conseguenza,  $b$  apparterrà all'intersezione della famiglia  $\mathcal{F}$ ). Se  $b$  è il massimo di  $X$ , allora  $b = b_G \in G$ . Altrimenti, se  $W$  è un intorno di  $b$ , allora  $W$  contiene un intervallo del tipo  $[b, c[$  con  $c > b$ . Per la seconda proprietà dell'estremo inferiore, esiste  $F \in \mathcal{G}$  tale che  $b \leq b_F < c$ . Poiché  $b \leq b_{F \cap G} \leq b_F$ , si ha che  $b_{F \cap G} \in W$ . Pertanto  $W \cap F \cap G \neq \emptyset$  e quindi  $W \cap G \neq \emptyset$ . Infine, dato che ogni intorno di  $b$  interseca  $G$ , si ha che  $b \in \text{clos } G = G$ .  $\square$

Oltre ai sottoinsiemi chiusi e limitati della retta reale, il teor. 8 mostra che il quadrato lessicografico  $\mathbb{L}$  e il cubo di Cantor sono compatti. Tuttavia il cubo di Cantor non è connesso perché è pieno di salti.

Uno spazio compatto e connesso si dice un *continuo*. Ovviamente uno spazio ordinato connesso è un continuo se e solo se ha massimo e minimo.

Pertanto un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  è un continuo se e solo se è un intervallo chiuso e limitato. Anche il quadrato lessicografico  $\mathbb{L}$  è un continuo. Tuttavia  $\mathbb{L}$  non può essere omeomorfo ad un intervallo di  $\mathbb{R}$ , perché  $\mathbb{L}$  non è separabile. Infatti, se  $D$  è un sottoinsieme numerabile di  $\mathbb{L}$ , l'insieme  $D_1$  delle ascisse dei punti di  $D$  è un insieme numerabile: presa un'ascissa  $\alpha$  che non appartiene a  $D_1$ , qualunque segmento aperto verticale di ascissa  $\alpha$  ha intersezione vuota con  $D$ .

È interessante osservare che:

**Teorema 9** *Ogni continuo ordinato e separabile è omeomorfo all'intervallo unitario  $I$ .*

**Dimostrazione.** Basta procedere come nel teor. 6, dopo aver mandato il minimo in 0 e il massimo in 1.  $\square$

Come conseguenza immediata del teor. 9, abbiamo che la circonferenza, con la topologia usuale, non è ordinabile.

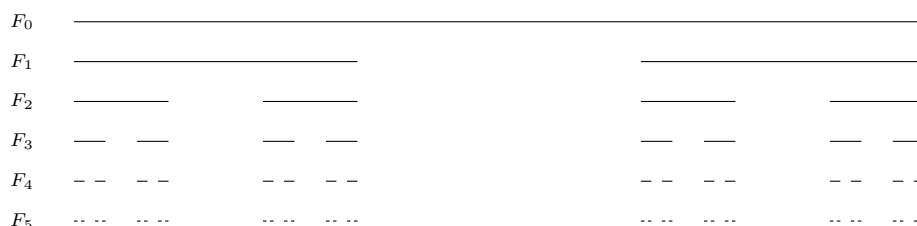
La seguente proposizione può essere provata direttamente, oppure usando il fatto che le topologie compatte sono minimali fra le topologie di Hausdorff [1, pag. 142].

**Osservazione 10** *Se  $Y$  è un sottospazio compatto di uno spazio ordinato  $X$ , la topologia relativa su  $Y$  coincide con la topologia dell'ordine indotto.*

### 3 Insiemi cantoriani

#### L'insieme di Cantor $C$

Costruiamo per induzione una successione decrescente di sottoinsiemi chiusi  $F_n$  dell'intervallo unitario  $I$ . Sia  $F_0 = I$ . Dividiamo l'intervallo  $I$  in tre intervalli chiusi e contigui, ognuno di lunghezza  $\frac{1}{3}$ . Escludiamo l'intervallo di mezzo e sia  $F_1$  l'unione dei due intervalli chiusi disgiunti che rimangono. Dividiamo ognuno dei due intervalli che compongono  $F_1$  in tre sottointervalli contigui di lunghezza  $\frac{1}{3^2}$  ed escludiamo al secondo passo ognuno degli intervalli di mezzo così ottenuti. Denotiamo con  $F_2$  l'unione dei  $2^2$  intervalli chiusi non esclusi al secondo passo.



Supponiamo che l'insieme  $F_n$  sia costituito da  $2^n$  intervalli chiusi disgiunti, ognuno di lunghezza  $3^{-n}$ . Dividiamo ognuno degli intervalli che compongono  $F_n$  in tre sottointervalli contigui di lunghezza  $\frac{1}{3} \cdot 3^{-n} = 3^{-n-1}$  ed escludiamo ognuno degli intervalli di mezzo così ottenuti. Denotiamo con  $F_{n+1}$  l'unione dei  $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$  sottointervalli chiusi non esclusi al passo  $n + 1$ -esimo. Poniamo  $C = \bigcap_{n \geq 1} F_n$ ; l'insieme  $C$  è non vuoto (contiene gli estremi di tutti gli intervalli rimossi) e si chiama *insieme di Cantor*. Ovviamente  $C$  è chiuso e quindi compatto: pertanto la topologia di  $C$  è quella dell'ordine (oss. 10).

Con il simbolo  $I_n$  indichiamo uno degli intervalli che compongono  $F_n$ . Fissiamo un punto  $p \in C$ . Per ogni  $n$  esiste un unico intervallo  $I_n(p)$  contenente  $p$ . Se  $J$  è un intervallo contenente  $p$  e contenuto in  $C$ , allora  $J$  dovrebbe essere contenuto in  $I_n(p)$  per ogni  $n$  (gli intervalli che compongono  $F_n$  sono a due a due disgiunti). Di conseguenza la lunghezza di  $J$  è 0 perché minore di  $3^{-n}$  per ogni  $n$ . Abbiamo così mostrato che:

*l'insieme di Cantor è un compatto linearmente ordinato che non ha sottoinsiemi connessi, tranne i punti.*

Osserviamo inoltre che esiste un intervallo  $I'_n$ , disgiunto da  $I_n(p)$ , tale che  $I'_n \cup I_n(p)$  è contenuto in un  $I_{n-1}$ . Di conseguenza l'intorno di  $p$  di raggio  $\delta$  contiene  $I'_n$ , purché  $3^{1-n} < \delta$ . Poiché  $C \cap I'_n$  è non vuoto<sup>4</sup>, consegue che  $p$  è punto di accumulazione. Dunque:

*l'insieme di Cantor è privo di punti isolati.*

<sup>4</sup> $I'_n \cap C$  è una copia omotetica di  $C$ , con rapporto di similitudine  $3^n$ .

La stessa dimostrazione prova che ogni intorno di  $p$  contiene un qualche intervallo  $I_n$ : perciò l'insieme  $S$  dei primi estremi degli intervalli rimossi forma un sottoinsieme numerabile denso dell'insieme di Cantor<sup>5</sup>.

Poiché fra due intervalli rimossi distinti c'è sempre qualche altro intervallo rimosso,  $S$  è privo di salti. D'altronde, per ogni intervallo rimosso, ne vengono rimossi anche alla sua sinistra e alla sua destra: quindi  $S$  è privo di massimo e di minimo. Di conseguenza:

*l'insieme  $S$  dei primi estremi dei salti di  $C$  è un sottoinsieme numerabile denso privo di massimo e di minimo e privo di salti.*

Poiché  $I_{n+1}(p) \subset I_n(p)$ , la famiglia  $\{I_n(p)\}$  è l'unica catena di intervalli inscatolati che ha per intersezione  $p$ . Viceversa, ogni catena  $\{I_n\}$  di intervalli inscatolati ha un unico punto di intersezione (sempre perché la lunghezza di  $I_n$  tende a 0). Poiché, ad ogni passo,  $I_n$  è il primo oppure il terzo intervallo della suddivisione di  $I_{n-1}$ , il numero cardinale dell'insieme di tali catene coincide con il numero di successioni i cui termini si possono scegliere nell'insieme di due oggetti {primo, terzo}. Pertanto:

*$C$  non è numerabile, perché ha il cardinale del continuo.*

## La topologia del cubo di Cantor

Consideriamo ora il cubo di Cantor  $D = \{0,1\}^\omega$ , con la topologia dell'ordine lessicografico. Ricordiamo che  $D$  è compatto e che tutti i salti sono del tipo:

\*\*\*\*\*, 0, 1, 1, 1, ...  
\*\*\*\*\*, 1, 0, 0, 0, ...

dove, nelle due sequenze, \*\*\*\*\* indica la stessa successione *binaria* finita.

Quando si parla di allineamenti decimali, si dice che due elementi sono vicini se hanno uguali le prime  $n$  cifre (con  $n$  grande). Più precisamente, in questo caso si usa la topologia individuata dalle relazioni di equivalenza *coincidere sulle prime  $n$  coordinate* (detta *topologia prodotto*<sup>6</sup> delle topologie discrete). In tale topologia, un sistema fondamentale di intorni di un punto  $\beta \in D$  è costituito dagli insiemi del tipo:

$$V_n(\beta) = \{\gamma : \gamma_j = \beta_j, \forall j \leq n\}$$

**Teorema 11** *Su  $D$ , la topologia prodotto coincide con la topologia dell'ordine lessicografico. Inoltre ogni  $V_n(\beta)$  è chiusoaperto.*

**Dimostrazione.** Supponiamo che  $\beta$  sia diverso dal minimo e dal massimo (altrimenti si ragiona in modo analogo). Proviamo che, se  $\alpha < \beta < \gamma$ , esiste  $n$  tale che  $V_n(\beta) \in ]\alpha, \gamma[$ . Se  $j_\alpha = \min\{j : \alpha_j < \beta_j\}$  e  $j_\gamma = \min\{j : \beta_j < \gamma_j\}$ , basta prendere  $n = \max\{j_\alpha, j_\gamma\}$ .

Viceversa dobbiamo provare che, preso  $V_n(\beta)$ , esistono  $\alpha < \beta < \gamma$  tali che  $] \alpha, \gamma [ \subseteq V_n(\beta)$ .

<sup>5</sup>I salti di  $C$  sono individuati esattamente dagli intervalli rimossi.

<sup>6</sup>Qui non importa la nozione generale di topologia prodotto.

Se  $\beta$  non termina con una coda di 0 o di 1, esistono  $j_1$  e  $j_2$  maggiori di  $n$  tali che  $\beta_{j_1} = 1$  e  $\beta_{j_2} = 0$ : basta prendere una sequenza  $\alpha$  che vale come  $\beta$  prima di  $j_1$  e con  $\alpha_{j_1} = 0$  e una sequenza  $\gamma$  che vale come  $\beta$  prima di  $j_2$  e con  $\gamma_{j_2} = 1$ .

Se invece, per esempio,  $\beta$  è del tipo<sup>7</sup>

$$\beta = (\overbrace{\star \star \star \star \star}^n, 0, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$$

prendiamo:

$$\alpha = (\overbrace{\star \star \star \star \star}^n, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots), \quad \gamma = (\overbrace{\star \star \star \star \star}^n, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots).$$

Allora  $]\alpha, \gamma[ \subseteq V_n(\beta)$  perché  $]\beta, \gamma[$  è vuoto ed  $\alpha$  e  $\beta$  coincidono sulle prime  $n$  coordinate.

Infine, gli insiemi  $V_n(\beta)$  sono chiusaperti perché sono classi di una relazione di equivalenza.  $\square$

Il cubo di Cantor è privo di punti isolati e gli unici sottoinsiemi connessi sono i punti (ogni  $V_n(\beta)$  è un chiusaperto con infiniti punti). Inoltre l'insieme  $D'$  costituito dai primi estremi dei salti è un sottoinsieme numerabile, topologicamente denso, privo di salti, di massimo e di minimo. Proveremo indirettamente queste proprietà, costruendo un isomorfismo per l'ordine dal cubo di Cantor  $D$  all'insieme di Cantor  $C$ .

**Proposizione 12** *Esiste un isomorfismo per l'ordine  $f : D \rightarrow C$ .*

**Dimostrazione.** Se  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots)$  è un elemento di  $D$ , costruiamo la catena  $I_n(\alpha)$  nel seguente modo:  $I_1(\alpha)$  è il primo o terzo intervallo di  $F_1$  a seconda che  $\alpha_1$  sia 0 oppure 1. Per induzione,  $I_{n+1}(\alpha)$  è il primo o terzo intervallo di  $F_n$  contenuto in  $I_n(\alpha)$  a seconda che  $\alpha_{n+1}$  sia 0 oppure 1. Definiamo  $f(\alpha) = \bigcap_n I_n(\alpha)$ .

Alla fine della costruzione di  $C$ , abbiamo già spiegato che  $f$  è biiettiva. Proviamo che  $f$  conserva l'ordine. Se  $\alpha < \beta$ , sia  $n$  il minimo indice tale che  $\alpha_n = 0$  e  $\beta_n = 1$ . Si ha allora  $I_j(\alpha) = I_j(\beta) = I_j$  per ogni  $j < n$ , mentre  $I_n(\alpha)$  e  $I_n(\beta)$  sono rispettivamente il primo e il terzo intervallo in cui è suddiviso  $I_{n-1}$ . Poiché  $f(\alpha) \in I_n(\alpha)$  e  $f(\beta) \in I_n(\beta)$ , si ha necessariamente  $f(\alpha) < f(\beta)$ , come volevasi dimostrare.

Osserviamo che, se  $\star \star \star \star \star$  ha lunghezza  $n - 1$ , allora  $f(\star \star \star \star \star, 0, 1, 1, 1, \dots)$  ed  $f(\star \star \star \star \star, 1, 0, 0, 0, \dots)$  sono gli estremi dell'intervallo rimosso al passo  $n$ -esimo. Pertanto la restrizione di  $f$  a  $D'$  è un isomorfismo per l'ordine da  $D'$  ad  $S$ .  $\square$

In modo analogo, si può associare ad ogni cubo di Cantor  $b$ -adico un insieme di Cantor ripetendo il processo con  $2b - 1$  suddivisioni. Per esempio, per costruire un sottoinsieme di  $I$  omeomorfo al cubo triadico  $T$ , si rimuovono il secondo e il quarto intervallo da ogni suddivisione in cinque intervalli contigui della stessa lunghezza.

Risulta così che  $T'$ , insieme dei primi estremi dei salti di  $T$ , è ancora numerabile, topologicamente denso, privo di salti, di massimo e di minimo. Per la prop. 5,

<sup>7</sup>Non è restrittivo supporre che  $n$  sia maggiore dell'indice in cui comincia la coda di 1.

esiste un isomorfismo  $g : D' \longrightarrow T'$ . Tale isomorfismo ci permette di dimostrare il seguente teorema.

**Teorema 13** *I cubi di Cantor sono tutti isomorfi per l'ordine e di conseguenza lo sono anche tutti gli insiemi di Cantor.*

**Dimostrazione.** Costruiamo un isomorfismo  $h : D \longrightarrow T$  nel seguente modo:  $h(x) = g(x)$  per ogni  $x \in D'$ . Se  $y$  è il secondo estremo di un salto, sia  $x$  il primo estremo dello stesso salto: poniamo  $h(y)$  uguale al secondo estremo del salto che ha per primo estremo  $h(x)$ . Fin qui, abbiamo costruito un isomorfismo  $h$  fra gli insiemi  $H$  e  $K$ , costituiti rispettivamente dagli estremi dei salti di  $D$  e  $T$ .

L'insieme delle lacune è linearmente ordinato mediante la relazione *inclusione insiemistica delle sezioni inferiori*. Pertanto  $h$  induce un isomorfismo per l'ordine fra le lacune di  $H$  e le lacune di  $K$ . Sia  $x \in D \setminus H$  e consideriamo il taglio di  $H$  formato da  $(A_x, B_x)$ , dove  $A_x = \{d \in H : d < x\}$  e  $B_x = \{d \in H : d > x\}$ . Se fra  $A_x$  e  $B_x$  ci fosse un elemento separatore  $y \neq x$ , per esempio  $y < x$ , l'intervallo  $]y, x[$  deve essere vuoto perché non contiene punti del denso  $H$ : questo è assurdo perché  $x$  non può essere estremo di un salto. Ciò implica che  $(A_x, B_x)$  è una lacuna di  $H$  e che, se  $x < y$ , allora  $A_x$  è strettamente contenuto in  $A_y$ . Viceversa, se  $(A, B)$  è una lacuna di  $H$ , per la compattezza di  $D$ , essa ammette un separatore  $x \in D \setminus H$  ed esso è unico per la densità di  $H$  e per il fatto che  $x$  non può essere estremo di un salto. Naturalmente lo stesso discorso si può fare per  $K$ .

Estendiamo ora la mappa  $h$  ai punti  $x \in D \setminus H$  nel seguente modo: sia  $(A_x, B_x)$  la lacuna di  $H$  associata al punto  $x$  e sia  $(h(A_x), h(B_x))$  la lacuna di  $K$  individuata dall'isomorfismo  $h : H \longrightarrow K$ . Detto  $y$  l'unico elemento separatore di questa lacuna in  $K$ , definiamo  $h(x) = y$ . Vista la corrispondenza punti-lacune e l'isomorfismo fra lacune di  $H$  e lacune di  $K$ , ne consegue che la mappa  $h : D \longrightarrow T$  è un isomorfismo.  $\square$

## Allineamenti $b$ -adici

Sia  $b \geq 2$  un numero naturale e sia  $D_b$  il cubo di Cantor formato dalle successioni a valori in  $\{0, 1, \dots, b-1\}$ . Tutti noi conosciamo la funzione  $\varphi : D_b \longrightarrow I$  che manda una successione  $b$ -adica  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots)$  nella somma della serie:

$$\varphi(\alpha) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\alpha_i}{b^i}$$

Tuttavia, per studiare le proprietà della mappa  $\varphi$ , è comodo procedere con suddivisioni successive dell'intervallo unitario. Al primo passo suddividiamo l'intervallo unitario in  $b$  intervalli contigui di lunghezza  $b^{-1}$  (il primo lo diciamo di posto 0, il secondo di posto 1, ...); al passo  $n$ -esimo suddividiamo ogni intervallo del passo  $n-1$ -esimo in  $b$  intervalli contigui di lunghezza  $b^{-n}$ , ottenendo in tutto  $b^n$  intervalli contigui di  $I$ . Ad ogni successione  $\alpha \in D_b$  si associa una catena  $I_n(\alpha)$ , dove  $I_n(\alpha)$  è un intervallino della suddivisione  $n$ -esima:  $I_1(\alpha)$  è l'intervallo di posto  $\alpha_1$  della prima suddivisione (il suo primo estremo è  $\frac{\alpha_1}{b}$ );  $I_n(\alpha)$  è l'intervallo di posto  $\alpha_n$  della suddivisione di  $I_{n-1}(\alpha)$  (il suo primo estremo è  $\frac{\alpha_1}{b} + \frac{\alpha_2}{b^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{b^n}$ ).

È abbastanza facile rendersi conto che:

$$\varphi(\alpha) = \bigcap_n I_n(\alpha)$$

Naturalmente, se  $\{J_n\}$  è una catena di intervalli inscatolati, la posizione di ognuno rispetto al precedente indica un'unica successione  $b$ -adica  $\alpha$  tale che  $I_n(\alpha) = J_n$ .

Scelto  $x \in I$ , si può costruire per induzione una catena di intervalli inscatolati  $I_n(x)$  contenenti  $x$  e pertanto:

$\varphi$  è suriettiva.

Se  $\alpha < \beta$ , detto  $n$  il primo indice in cui differiscono, è  $\alpha_n < \beta_n$ . Pertanto  $I_{n-1}(\alpha) = I_{n-1}(\beta)$ , mentre  $I_n(\alpha)$  viene prima di  $I_n(\beta)$ . Poiché  $\varphi(\alpha) \in I_n(\alpha)$  e  $\varphi(\beta) \in I_n(\beta)$ , si ha  $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$  ( $I_n(\alpha)$  e  $I_n(\beta)$  possono avere un estremo in comune). Tenendo conto della prop. 4, abbiamo:

$\varphi$  è monotona suriettiva e quindi continua.

Vogliamo vedere ora com'è fatta l'antiimmagine di un punto. Chiamiamo  $b$ -adico un numero che è estremo di un intervallo  $I_n$ . Se  $x$  non è  $b$ -adico, per ogni  $n$  esiste un unico intervallo  $I_n$  contenente  $x$  e pertanto l'antiimmagine di  $x$  è costituita da un'unica successione. La stessa cosa succede se  $x$  è 0 oppure 1.

Sia ora  $x$  un  $b$ -adico diverso dagli estremi di  $I$ . Sia  $n$  il minimo indice per cui esso è primo estremo di un intervallo  $I_n$ : perciò è anche secondo estremo dell'intervallo adiacente a sinistra  $J_n$ . Mentre nei passi prima di  $n$  sono unicamente individuati gli intervalli che contengono  $x$ , al passo  $n$  la scelta si biforca fra  $J_n$  e  $I_n$ : se scegliamo  $J_n$ , ai passi successivi siamo obbligati a prendere sempre l'ultimo intervallo (cifra  $b-1$ ); se scegliamo  $I_n$ , siamo obbligati a prendere il primo intervallo (cifra 0). Naturalmente la cifra di  $I_n$  supera di un'unità la cifra di  $J_n$ . Pertanto:

*se  $\alpha < \beta$ , allora  $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$ , a meno che  $\alpha$  e  $\beta$  siano estremi dello stesso salto in  $D_b$ ; in quest'ultimo caso è  $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ . La mappa  $\varphi$  si può chiamare la «mappa che incolla i salti».*

*Osservazione.* Sia  $E = D \setminus D'$ , dove  $D'$  è l'insieme dei primi estremi dei salti di  $D$  e sia  $\sigma$  la restrizione di  $\varphi$  ad  $E$ . La funzione  $\sigma : E \rightarrow I$  è un isomorfismo per l'ordine. Tuttavia  $\sigma$  non è un omeomorfismo, perché la topologia indotta su  $E$  dalla topologia prodotto è strettamente più fine di quella dell'ordine di  $E$ . Per rendersi conto che  $\sigma^{-1}$  non è continua, basta considerare la successione di punti di  $I$ :

$$x_i = \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^i}$$

Mentre  $\lim x_i = \frac{1}{2}$ , si ha invece che  $\sigma^{-1}(x_i)$  non converge a  $\sigma^{-1}(\frac{1}{2})$ , perché la prima cifra binaria di  $\sigma^{-1}(x_i)$  è 0, mentre la prima cifra binaria di  $\sigma^{-1}(\frac{1}{2})$  è 1.

Se invece su  $D$  facciamo il *quoziente* rispetto all'identificazione degli estremi consecutivi di ogni salto, allora la mappa indotta da  $\varphi$  sullo spazio topologico quoziente è un omeomorfismo su  $I$ .

*Osservazione.* L'insieme di Cantor  $C$  è l'insieme dei punti di  $I$  che, in base  $b=3$ , ammettono un'espansione formata soltanto dalle cifre 0 e 2.

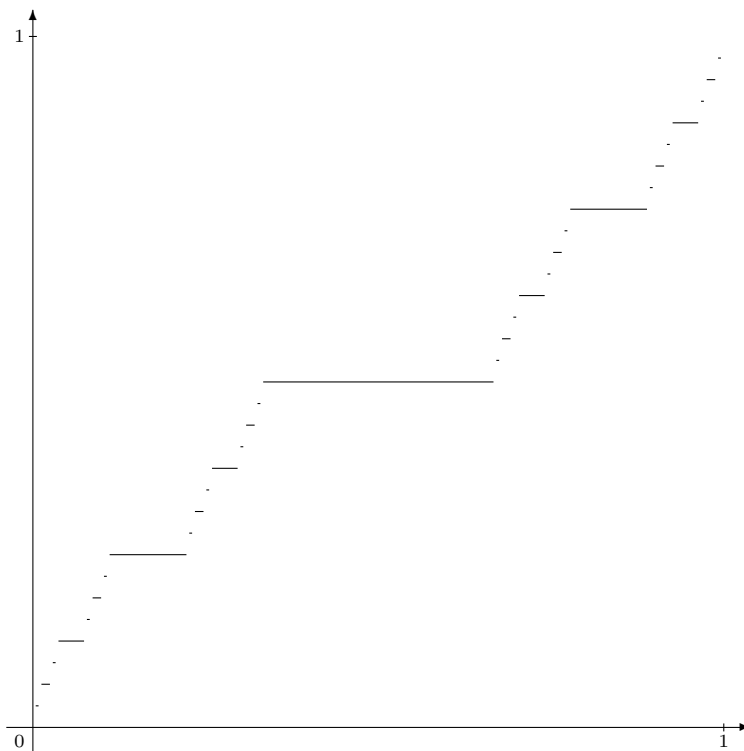
### La funzione *scalinata*

Sia  $f : D \rightarrow C$  l'isomorfismo definito nella prop. 12 e sia  $\varphi : D \rightarrow I$  la mappa che incolla i salti vista poc'anzi. Si consideri la mappa  $\psi : C \rightarrow I$  così definita:  $\psi(x) = \varphi(f^{-1}(x))$ . Ovviamente  $\psi$  è *monotona, continua e suriettiva* e, per quanto detto in precedenza,  $\psi(x_1) < \psi(x_2)$ , a meno che  $x_1$  e  $x_2$  siano estremi di un salto di  $C$ .

Osserviamo che, se  $x \in C$ , con  $x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{c_i}{3^i}$ , ove le cifre  $c_i$  sono 0 oppure 2, si ha:

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} c_i$$

Se  $x_1$  e  $x_2$  sono estremi di un intervallo rimosso (salto di  $C$ ), si ha  $\psi(x_1) = \psi(x_2)$  e pertanto  $\psi$  si può estendere all'intervallo  $[x_1, x_2]$  con valore costante.



La funzione estesa così ottenuta è detta *funzione scalinata*. Essa è una funzione monotona suriettiva dall'intervallo unitario in se stesso ed ha derivata nulla su un insieme di intervalli disgiunti, la somma delle cui lunghezze vale 1.

UMBERTO MARCONI  
Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata  
Padova

## Bibliografia

- [1] V. Checchucci, A. Tognoli, and E. Vesentini. *Lezioni di topologia generale*. Feltrinelli, Milano, 1968.
- [2] Ryszard Engelking. *General Topology*. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- [3] Ryszard Engelking and Karol Sieklucki. *Topology, a Geometric Approach*. Heldermann Verlag, Berlin, 1992.
- [4] Giuseppe De Marco. *Analisi due/1*. Decibel Zanichelli, Padova, 1995.
- [5] Giuseppe De Marco. *Analisi uno*. Decibel Zanichelli, Padova, 1996.
- [6] Giovanni Prodi. *Analisi Matematica*. Bollati Boringhieri, Torino, 1991.