TEMA E

| Q 1 | Q 2 | Q 3 | Q 4 | Somma | Voto finale |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

Prova scritta di Analisi del primo anno per il corso di Laurea in Matematica 27/03/09.

COGNOME.................. NOME.................. MATRICOLA..................
**ATTENZIONE**: Mettere una crocetta sulla casella corrispondente al tipo di prova che si intende sostenere e nel caso di recupero indicare a fianco il quesito interessato:
☐ Intero scritto di Analisi Matematica 1: rispondere a tutti i quesiti. Tempo 180 Minuti.
☐ Vecchio ordinamento Matematica 1 mod B: rispondere ai quesiti 2, 3 e 4. Tempo 135 Minuti.
☐ Recupero Quesiti: ....... Tempo 45 Minuti a quesito.

**Avvertenze.** Durante il tempo concesso NON è permesso uscire dall'aula, se non per la consegna, che non dovrà comunque avvenire prima di 45 minuti dall'inizio della prova. NON è concesso consultare nè testi nè appunti. NON è permesso l'uso di macchine calcolatrici. Nello svolgere ciascun esercizio, lo studente può dare per scontati, limitandosi a citarli, solo enunciati in programma: ogni altra affermazione deve essere scrupolosamente dimostrata. La risposta a ciascun quesito deve essere scritta nello spazio immediatamente sottostante il testo del medesimo e nelle pagine seguenti di questo ciclostilato che precedono l'eventuale esercizio successivo. È permesso scrivere su ambo le facciate di ciascuna pagina. Allo studente NON è consentita la consegna di alcun foglio di brutta. **Ogni foglio di brutta consegnato verrà cestinato**.

Si prevede che l'esito della prova sarà comunicato entro il 31/03/09.

La visione compiti è fissata per il 01/04/09 alle ore 9.00 in aula 1A150 .

**Quesito 1.**

a) Sia $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri complessi e sia $w \in \mathbb{C}$.
Cosa significa che $\lim_{n\to+\infty} z_n = w$? Dare due formulazioni, una con gli intorni del limite e una con la distanza euclidea.

b) Sia $E$ così definito:

$$E = \left\{ i^n + \left( \frac{1}{3} - \frac{i}{4} \right)^n \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

1. Trovare e disegnare il derivato di $E$.
2. Dire chi è la frontiera di $E$.
3. Dire chi è l'interno di $E$.

c) Stesse domande per l'insieme $F$ così definito:

$$F = \{x + iy \in \mathbb{C} : \ x, y \in \mathbb{R} \text{ e inoltre } y^2 < x < y^3\}$$

**Risposta:**

**Quesito 2.** Sia $f : [-2, +\infty[ \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} (1-2x)\exp\left(\frac{-1}{x+2}\right) & \text{se } x > -2, \\ 0 & \text{se } x = -2. \end{cases}$$

a) Determinare in quali punti $f$ è continua.
Determinare poi il limite a $+\infty$ e l'eventuale asintoto obliquo di $f$ (ricordare che se $\sigma(x)$ è infinitesima a $+\infty$ allora $\exp\sigma(x) - 1$ è asintotica a $\sigma(x)$ ... ).

b) Calcolare la derivata prima per $x > -2$.
Dire poi se $f$ è derivabile in $-2$.
Studiare infine il segno della derivata prima e gli intervalli di monotonia di $f$.

c) Trovare gli estremanti locali e assoluti; trovare poi l'immagine di $f$.

d) Sia $E = [0, +\infty[$ e sia $G = f(E)$. Trovare $G$.
Sia $h : E \to G$ definita da $h(x) = f(x)\ \forall x \in E$.
È vero che $h$ è un omeomorfismo?
È vero che $h$ è un diffeomorfismo?

**Risposta:**

**Quesito 3.**

a) Enunciare la definizione di funzione Riemann integrabile in $\mathbb{R}$.

b) Scrivere la formula di Taylor arrestata ai termini di grado 2 con resto di Peano e punto iniziale $\frac{\pi}{2}$ per la funzione cos.

c) Scrivere la formula di Taylor arrestata ai termini di grado 2 con resto di Peano e punto iniziale 0 per la funzione $1 - \cos$.

d) Sia, per ciascun $\alpha > 0$, $f_\alpha$ la funzione di $]0, \frac{\pi}{2}[$ in $\mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x) \equiv \frac{\sin^\alpha x}{(1-\cos x)^\alpha \cos^\alpha x} \qquad \forall x \in ]0, \frac{\pi}{2}[\,.$$

Stabilire per quali valori di $\alpha > 0$ la funzione $f_\alpha$ è integrabile in senso generalizzato.

e) Calcolare

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\sin x}{(1-\cos x)\cos x}\, dx\,.$$

**Risposta:**

**Quesito 4.**

a) Enunciare il criterio criterio del confronto asintotico per le serie.

b) Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)^{\alpha} x^n$$

converge, al variare di $\alpha \in ]0, +\infty[$.

**Risposta:**