# SPAZI TOPOLOGICI

La nozione di spazio topologico è più generale di quella di spazio metrizzabile.

**Definizione 1** *Uno* ***spazio topologico*** $(X, \tau)$ *è una coppia costituita da un insieme* $X$ *e da una famiglia* $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ *di sottoinsiemi di* $X$ *soddisfacente agli assiomi* ($A_1$), ($A_2$), ($A_3$).
$\tau$ *è detta topologia di* $X$*;*
*i suoi elementi sono gli aperti di* $X$*.*

***Esempi.***

- Se $(X, d)$ è uno spazio metrico, la famiglia $\tau$ costituita dai sottoinsiemi che sono unione di palle aperte forma la topologia indotta dalla metrica $d$.
- Su ogni insieme $X$, la famiglia $\tau = \mathcal{P}(X)$ forma una topologia detta **topologia discreta**.
  Essa è indotta dalla metrica discreta;
  in essa i singoletti sono insiemi aperti.
- La famiglia $\tau = \{\emptyset, X\}$ forma una topologia detta **topologia banale**.
- Su $\mathbb{R}$ la famiglia $\tau_\iota = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[ : \ a \in \mathbb{R}\}$ forma una topologia detta **topologia inferiore** di $\mathbb{R}$.
  (analogamente si definisce la topologia superiore).
- Chiamiamo *topologia di Sorgenfrey* su $\mathbb{R}$ la topologia in cui gli insiemi aperti sono unioni di intervalli del tipo$[a, b[$, con $a < b$. Non è difficile verificare che in effetti si tratta di una topologia e che gli aperti della topologia euclidea sono aperti della topologia di Sorgenfrey. Si può dimostrare, ma è difficile, che non esiste una metrica che induce la topologia di Sorgenfrey.

I concetti di chiuso, intorno, chiusura, interno,... si danno come negli spazi metrizzabili, e sussistono le stesse proprietà.
Attenzione:
non è più detto che i singoletti e gli insiemi finiti siano chiusi;
non è più detto che se $p$ è un punto di accumulazione per un sottoinsieme $A$, allora ogni intorno di $p$ contenga infiniti punti di $A$.

***Esempio.*** Trovare la chiusura di un insieme finito nella topologia inferiore.

**Proposizione 2** *In uno spazio metrizzabile* $(X, d)$ *punti distinti hanno intorni disgiunti.*

*Dimostrazione.* Se $p \neq q$, sia $r < \frac{1}{2}d(p, q)$:
le palle $B(p, r[$ e $B(q, r[$ sono intorni disgiunti di $p$ e $q$. $\square$

Negli spazi topologici si può aggiungere l'assioma di separazione di Hausdorff:

**Definizione 3** *Uno spazio topologico* $(X, \tau)$ *si dice di Hausdorff, o* $T_2$ *o separato, se, comunque presi due punti distinti* $x_1 \neq x_2$*, esistono* $U_1$ *intorno di* $x_1$ *e* $U_2$ *intorno di* $x_2$ *tali che* $U_1 \cap U_2 = \emptyset$*.*

***Esercizio.***

- In uno spazio topologico di Hausdorff gli insiemi finiti sono chiusi.
- In uno spazio topologico di Hausdorff $p \in A' \iff$ ogni intorno di $p$ contiene infiniti punti di $A$.
- Uno spazio topologico è di Hausdorff $\iff$ ogni singoletto $\{p\}$ è intersezione di intorni chiusi di $p$.
- Su un insieme $X$ considerare la topologia cofinita $\tau_{\text{cof}}$, i cui aperti sono gli insiemi che hanno complementare finito:
  se $X$ è infinito, $\tau_{\text{cof}}$ non è mai di Hausdorff;
  se $X$ è finito, $\tau_{\text{cof}}$ coincide con la topologia discreta.

**Definizione 4** *Si chiama* ***base*** *per una topologia* $\tau$ *un insieme* $\mathcal{B} \subseteq \tau$ *tale che ogni elemento di* $\tau$ *è unione di elementi di* $\mathcal{B}$*, cioè:*

*per ogni aperto* $A \in \tau$ *e per ogni* $x \in A$
*esiste* $U \in \mathcal{B}$ *tale che* $x \in U \subseteq A$*.*

***Esempi.***

- Se $(X, \tau)$ è metrizzabile dalla metrica $d$, allora le palle aperte (di raggio $\frac{1}{n}$) formano una base.
- I singoletti formano una base per la topologia discreta.
- Gli intervalli aperti (di estremi razionali) formano una base per la topologia di $\mathbb{R}$.
- Gli intervalli $[a, b[$ sono una base per la topologia di Sorgenfrey su $\mathbb{R}$.
- I rettangoli aperti formano una base per la topologia euclidea del piano.

Importante:

se $\mathcal{B}$ è una base per una topologia $\tau$ su $X$, allora per ogni $x \in X$ l'insieme

$$\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : \ x \in B\}$$

è base per gli intorni di $x$ nella topologia $\tau$, nel senso che ogni elemento di $\mathcal{B}_x$ è intorno di $x$ e ogni intorno di $x$ contiene un elemento di $\mathcal{B}_x$.

**Definizione 5** *Uno spazio si dice* ***separabile*** *se contiene un sottoinsieme denso numerabile.*

***Esercizio.***

- Dimostrare che $\mathbb{R}$ ha una base numerabile per gli aperti.
- Dimostrare che uno spazio topologico con base numerabile è separabile.
- Dimostrare che uno spazio metrizzabile separabile ammette una base numerabile per gli aperti.
  Traccia:
  sia $D = \{x_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ un insieme denso numerabile;
  considerare la famiglia $\mathcal{B} = \{B(x_n, \frac{1}{k}[: \ n, k \in \mathbb{N}, \ k \geq 1\}$.

**Definizione 6** *Se $(X, \tau)$ è spazio topologico e $S \subseteq X$, la topologia indotta da $\tau$ su $S$ è la topologia:*

$$\tau_S = \{A \cap S : \ A \in \tau\}$$

*$S$ con la topologia $\tau_S$ è detto* ***sottospazio topologico*** *di $X$.*
*Se $p \in S$, un intorno (aperto) di $p$ nella topologia relativa è del tipo $U \cap S$, ove $U$ è intorno (aperto) di $p$ in $X$.*

Osservare che gli aperti o i chiusi in $S$ non sono in generale aperti o chiusi in $X$.
**Esercizi importanti.**

- Descrivere una base per la topologia euclidea di $[0, 1]$.
- Dimostrare che se $S$ è aperto (chiuso) in $X$ allora ogni aperto (chiuso) di $S$ è aperto (chiuso) in $X$.
- Sia $(X, d)$ spazio metrico con topologia $\tau = \tau_d$ e $S \subseteq X$.
  Allora la topologia della metrica indotta $d_S$ coincide con la topologia indotta $\tau_S$
  (la traccia di ogni palla è unione di palle con centri in $S$).
- Siano $D \subseteq S \subseteq X$ e $\tau$ la topologia di $X$.
  Se $D$ è denso in $\tau_S$ e $S$ è denso in $X$, allora $D$ è denso in $X$.
  Morale: un denso in un denso è denso.
- Sia $T \subseteq S \subseteq X$, con $X$ spazio topologico.
  Osservare che:
  $$\tau_T = (\tau_S)_T$$
- Qual è la topologia indotta da $\mathbb{R}$ su $\mathbb{Z}$?
- Un punto $p \in S$ è isolato in $S \iff \{p\}$ è aperto nella topologia relativa di $S$.

# Funzioni continue

**Definizione 7** *Siano $(X, \tau)$ e $(Y, \sigma)$ spazi topologici, $f : X \to Y$ una funzione, $a \in X$.*

- *$f$ si dice **continua in a** se per ogni intorno $V$ di $f(a)$*

$$\text{esiste un intorno } U \text{ di } a \text{ tale che } f(U) \subseteq V$$
$$\Updownarrow$$
$$f^{\leftarrow}(V) \text{ è un intorno di } a$$

- *$f$ si dice **continua** se è continua in ogni punto $a \in X$.*

**Osservazioni importanti.**

- Siano $\mathcal{B}_a$ e $\mathcal{B}_{f(a)}$ basi di intorni per $a$ e $f(a)$ rispettivamente. Allora $V$ si può scegliere in $\mathcal{B}_{f(a)}$ e $U$ esiste in $\mathcal{B}_a$.
- Se $X$ è un sottospazio di uno spazio topologico $Z$, gli intorni si intendono nella topologia relativa di $X$.
- Se $a$ è un punto isolato di $X$, ogni funzione è continua in $a$.

**Proposizione 8** *Siano $(X, d)$ e $(Y, \rho)$ spazi metrici.*

*1) Una funzione $f : X \to Y$ è continua in $a \in X$ se e solo se*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tale che } \forall\, x \in X\ d(x, a) < \delta\ \Rightarrow\ \rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

*(le disuguaglianze si possono prendere larghe).*

*2) Una funzione $f : X \to Y$ è continua in $a \in X$ se e solo se per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di punti di $X$ convergente ad $a$ si ha che la successione $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(a)$.*

$\boxed{\textit{Dimostrazione di 2}}$ *Necessità:* conseguenza immediata di 1.
*Sufficienza.* Per assurdo, se $f$ non fosse continua in $a$, si potrebbe trovare $\bar\varepsilon$ con la seguente proprietà:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad f(B(a, \frac{1}{n}[) \not\subseteq B(f(a), \bar\varepsilon[)$$

In altri termini, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esisterebbe $x_n \in X$ che dista meno di $\frac{1}{n}$ da $a$ mentre $f(x_n)$ dista almeno $\bar\varepsilon$ da $f(a)$.
Dunque: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad $a$, mentre $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ non converge a $f(a)$, assurdo. $\square$

**Osservazione.** Ogni funzione lipschitziana è continua [**GDM, 12.5.3**].

**Proposizione 9** *Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$.*
*Se $f$ è continua in $a$ e $g$ è continua in $f(a)$, allora $g \circ f$ è continua in $a$*

*Dimostrazione.* $(g \circ f)^{\leftarrow}(W) = f^{\leftarrow}(g^{\leftarrow}(W))$. $\square$

Perciò la composizione di funzioni continue è continua.
Fatti:

- ogni funzione costante è continua.
- la restrizione a un sottospazio di una funzione continua è continua.
- Se $A$ è sottospazio aperto di $X$ e $f_{|A}$ è continua in $a \in A$, allora $f$ è continua in $a$ (è essenziale l'ipotesi che $A$ è aperto).
  Di conseguenza, se $f_{|A}$ è continua, allora $f$ è continua nei punti di $A$.

**Teorema 10** *Sia $f : X \to Y$ una funzione fra spazi topologici.*
*Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

*i) $f$ è continua.*

*ii) Per ogni aperto (di base) $V$ di $Y$ si ha che $f^{\leftarrow}(V)$ è un aperto di $X$.*

*iii) Per ogni chiuso $F$ di $Y$ si ha $f^{\leftarrow}(F)$ è un chiuso di $X$.*

*iv) Per ogni $A \subseteq X$ si ha che $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.*

*Dimostrazione.* L'equivalenza delle prime tre è elementare.
*iii* $\Rightarrow$ *iv* Poiché $A \subseteq f^{\leftarrow}(f(A)) \subseteq f^{\leftarrow}(\overline{f(A)})$ e quest'ultimo insieme è chiuso, si ottiene $\overline{A} \subseteq f^{\leftarrow}(\overline{f(A)})$. Passando all'immagine, si ha la tesi.
*iv* $\Rightarrow$ *iii* Sia $F$ chiuso di $Y$ e sia $A = f^{\leftarrow}(F)$.
Si ha: $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{F} = F$, e quindi:

$$f(\overline{f^{\leftarrow}(F)}) \subseteq F$$

da cui $\overline{f^{\leftarrow}(F)} \subseteq f^{\leftarrow}(F)$.
Dunque $f^{\leftarrow}(F)$ è chiuso perché contiene la propria chiusura. □

***Corollario.*** [v. GDM 12.7.6] Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ funzioni continue a valori reali definite su uno spazio topologico $X$. Gli insiemi

$$\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}, \qquad \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

sono chiusi in $X$, mentre l'insieme

$$\{x \in X : f(x) < g(x)\},$$

è aperto in $X$.
In particolare il luogo degli zeri di una funzione continua

$$Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$$

è chiuso in $X$.

## Connessione

Si veda la dispensina Connessione e **[GDM, 12.8 solo enunciati, 12.9, 12.10 anche dimostrazioni]**.

*Osservazione.* Abbiamo dimostrato che exp è continua **[GDM, 7.17.1]**. Di conseguenza l'immagine di exp è un intervallo; poiché $\inf \exp = 0$ e $\sup \exp = +\infty$, si ottiene:

$$\exp \mathbb{R} = ]0, +\infty[$$

Poiché exp è una biiezione monotona tra intervalli, essa è un omeomorfismo, e quindi la sua inversa, che è log, è continua.
Dalla continuità di sin e cos segue che queste funzioni mandano intervalli su intervalli; pertanto le loro inverse locali sono continue perché biiezioni monotone tra intervalli.

***Esercizio importante.*** Dimostrare che i connessi di $\tilde{\mathbb{R}}$ sono tutti e soli gli intervalli di $\tilde{\mathbb{R}}$.

## Incollamento a pezzi

Sia $f : X \to Y$ una funzione.

- Se $X$ è unione di una famiglia di aperti $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$
  e $f_{|A_\lambda}$ è continua per ogni $\lambda$,
  allora $f$ è continua.
- Se $X$ è unione di una famiglia finita di chiusi $\{F_1, \ldots, F_m\}$
  e $f_{|F_j}$ è continua per ogni $j$,
  allora $f$ è continua.

Morale: purché le restrizioni siano continue,
la continuità si conserva per unioni **finite** di chiusi e unioni **qualsiasi** di aperti.

***Esempio.*** Una funzione $f : X \to Y$ si dice localmente costante se per ogni $a \in X$ esiste un intorno $U$ di $a$ tale che $f(x) = f(a)\ \forall x \in U$.
Ogni funzione localmente costante è continua.

***Esercizio.*** Sia $f : [0, 2\pi[ \to \mathbb{S}^1$ definita da:

$$f(t) = (\cos t, \sin t)$$

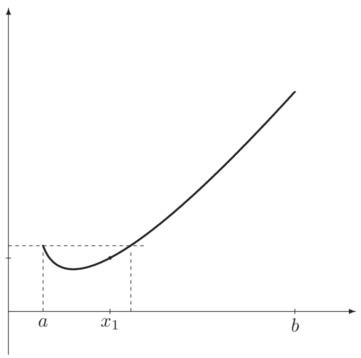
Dimostrare che $f$ è biiettiva e continua
ma che l'inversa non è continua in $a = (1, 0)$
(trovare in $\mathbb{S}^1$ un'opportuna successione $(y_n) \to a$ tale che $(f^{-1}(y_n))$ non converge).

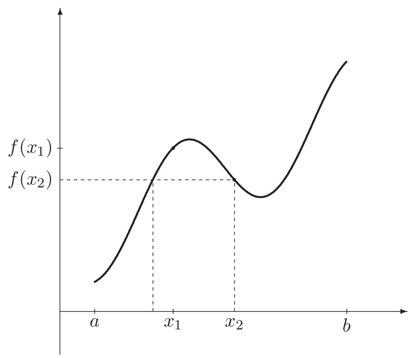
**Definizione 11** *Siano $X, Y$ spazi topologici.*
*Una funzione $f : X \to Y$ è detta* ***omeomorfismo*** *se è continua, biiettiva e la sua inversa $f^{-1} : Y \to X$ è pure continua.*
*$X$ e $Y$ si dicono omeomorfi se esiste un omeomorfismo tra di essi.*

***Esercizi.***

- Entro una data famiglia di spazi topologici, l'essere omeomorfi è una relazione di equivalenza.

- La funzione $f : \mathbb{R} \to ]-1,1[$ definita da:
$$f(t) = \frac{t}{1+|t|}$$
è un omeomorfismo.
L'inversa è: $f^{-1}(s) = \frac{s}{1-|s|}$
- Due intervalli aperti di $\mathbb{R}$ sono sempre omeomorfi.
- ogni omeomorfismo tra due intervalli di $\mathbb{R}$ è necessariamente una funzione monotona (quindi devono essere entrambi aperti, entrambi chiusi,...).




***Esercizio.*** Ogni biiezione monotona tra intervalli di $\tilde{\mathbb{R}}$ è un omeomorfismo.

***Esempio.*** La **retta estesa**
$$\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$
viene ordinata dall'ordine usuale di $\mathbb{R}$, con le condizioni aggiuntive che $+\infty$ sia massimo e che $-\infty$ sia minimo.
$\tilde{\mathbb{R}}$ viene topologizzato assumendo come base di aperti gli usuali aperti di $\mathbb{R}$ e in più gli intervalli del tipo $[-\infty, a[$ e $]b, +\infty]$;
questi ultimi formano una base di intorni rispettivamente di $-\infty$ e $+\infty$.
Osservare che $\mathbb{R}$ è un sottospazio aperto di $\tilde{\mathbb{R}}$.
La funzione $g : \tilde{\mathbb{R}} \to [-1,1]$ definita da
$$g(t) = \frac{t}{1+|t|} \text{ se } t \in \mathbb{R}, \quad g(-\infty) = -1, \quad g(+\infty) = 1$$
è un omeomorfismo:
nei punti di $\mathbb{R}$ la $g$ coincide con la $f$ precedente;
agli estremi si verifica direttamente (con gli intorni, fare un grafico).
$\tilde{\mathbb{R}}$ è metrizzabile con la metrica:
$$d_g(x,y) = |g(x) - g(y)|$$

**Compattificazione con un punto di $\mathbb{R}$:**
$$\alpha\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$
Gli aperti sono gli aperti di $\mathbb{R}$ e i complementari in $\alpha\mathbb{R}$ dei sottoinsiemi chiusi e limitati di $\mathbb{R}$.
Verificare che effettivamente così si ha una topologia su $\alpha\mathbb{R}$, che induce la topologia usuale su $\mathbb{R}$.
Una successione di numeri reali $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ha limite $\infty$ in $\alpha\mathbb{R}$ se e solo se $(|x_j|)_{j\in\mathbb{N}}$ ha limite $+\infty$ in $\tilde{\mathbb{R}}$.
Dimostrare che è continua la funzione $f : \tilde{\mathbb{R}} \to \alpha\mathbb{R}$ definita da:
$$f(t) = t \text{ se } t \in \mathbb{R}, \qquad f(+\infty) = f(-\infty) = \infty$$
(la funzione $f$ incolla gli estremi di $\tilde{\mathbb{R}}$).
Dimostriamo che $\alpha\mathbb{R}$ è omeomorfo al circolo:
$$\mathbb{S}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$$
tramite un omeomorfismo che manda il punto $(0,1)$ nel punto $\infty$ (proiezione stereografica).
*Dimostrazione.* Si consideri la retta passante per il punto $(0,1)$ e qualsiasi punto $(a,b) \in \mathbb{S}_1$. Essa ha equazione $(1-b)x + ay = a$. Essa interseca l'asse delle ascisse nel punto $\sigma(a,b) = \frac{a}{1-b}$ se $(a,b) \neq (0,1)$. Se $(a,b) = (0,1)$ definiamo $\sigma(a,b) = \infty$.
$\sigma$ è una biiezione da $\mathbb{S}_1$ ad $\alpha\mathbb{R}$ (v. figura). $\sigma$ è continua nei punti diversi da $(0,1)$ perché rapporto di funzioni continue con denominatore diverso da 0 $(\mathrm{pr}_1, 1-\mathrm{pr}_2)$.

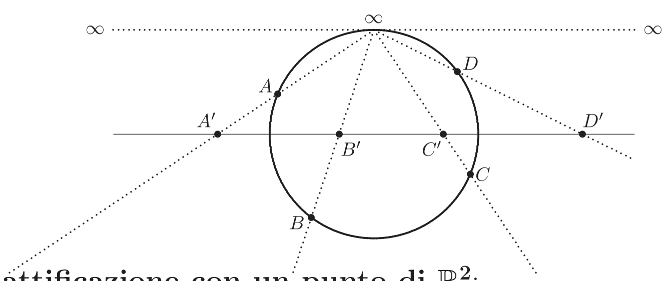
Che $\sigma$ sia continua in $(0,1)$ si vede osservando che:

$$|\sigma(a,b)| = \frac{|a|}{1-b} = \frac{\sqrt{1-b^2}}{1-b} = \sqrt{\frac{1+b}{1-b}} \to \infty$$

per $b \to 1^-$.
Un conto analogo mostra che l'inversa di $\sigma$ è data, per $x$ reale, da:

$$\sigma^{-1}(x) = \left(\frac{2x}{1+|x|^2}, \frac{|x|^2-1}{|x|^2+1}\right)$$

Si ha poi $\sigma^{-1}(\infty) = (0,1)$.
Non è difficile dimostrare che anche $\sigma^{-1}$ è continua (v. figura). □




**Compattificazione con un punto di $\mathbb{R}^2$:**

$$\alpha\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$$

Gli aperti sono gli aperti di $\mathbb{R}^2$ e i complementari in $\alpha\mathbb{R}^2$ dei sottoinsiemi chiusi e limitati di $\mathbb{R}^2$.
Verificare che effettivamente così si ha una topologia su $\alpha\mathbb{R}^2$, che induce la topologia usuale su $\mathbb{R}^2$.
Una successione di punti del piano $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ha limite $\infty$ in $\alpha\mathbb{R}^2$ se e solo se $(|p_j|)_{j\in\mathbb{N}}$ ha limite $+\infty$ in $\tilde{\mathbb{R}}$.
Si può dimostrare che $\alpha\mathbb{R}^2$ è omeomorfo alla sfera:

$$\mathbb{S}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

tramite un omeomorfismo che manda il punto $(0,0,1)$ nel punto $\infty$ (proiezione stereografica). Tale omeomorfismo manda l'emisfero australe nel disco dei punti del piano di modulo $\leq 1$ e l'emisfero boreale nel complementare di tale disco unito $\{\infty\}$.

**Proposizione 12** *Sia $f : X \to Y$ una funzione continua, ove $Y$ è di Hausdorff e sia $c \in Y$. Allora l'insieme:*

$$f^{\leftarrow}(\{c\}) = \{x \in X : \; f(x) = c\}$$

*è un chiuso di $X$.*

In altri termini, gli *insiemi di livello* di una funzione continua sono sottoinsiemi chiusi del dominio.

**Proposizione 13** *Siano $f, g : X \to Y$ funzioni continue.*
*Se $Y$ è di Hausdorff, l'insieme:*

$$C = \{x \in X : \; f(x) = g(x)\}$$

*è chiuso in $X$.*

Basta dimostrare che $X \setminus C$ è aperto.
Se $p \notin C$, allora $f(p) \neq g(p)$ ...

**Corollario 14** *Siano $f, g : X \to Y$ funzioni continue, ove $Y$ è di Hausdorff.*
*Sia $D$ un sottoinsieme denso di $X$ tale che $f(x) = g(x)\ \forall\, x \in D$.*
*Allora $f(x) = g(x)\ \forall\, x \in X$.*

**Definizione di limite.** Sottinteso: $D \subseteq X$, $f : D \to Y$, $a \in D'$, $l \in Y$.

$$l \in \lim_{\substack{x \to a \\ x \in D}} f(x)$$

significa che:

per ogni intorno $V$ di $l$ esiste un intorno $U$ di $a$ tale che:

$$\forall\, x \in (U \setminus \{a\}) \cap D \text{ si ha } f(x) \in V$$

Se $Y$ è di Hausdorff il limite, se esiste, è unico e si scrive:

$$l = \lim_{x\to a} f(x)$$

tenendo presente che il dominio è implicito nella funzione.

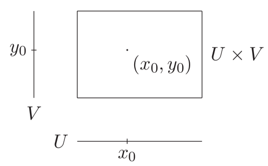
## Prodotto di spazi topologici

Siano $(X,\tau)$ e $(Y,\sigma)$ spazi topologici.
Sul prodotto cartesiano $X \times Y$ vogliamo porre una topologia in modo che:

un punto $(x,y)$ sta in un intorno di $(x_0,y_0)$
$\iff$ $x$ sta in un intorno di $x_0$ e $y$ sta in un intorno di $y_0$.

Una base di intorni di $(x_0,y_0)$ sarà pertanto della forma:

$$\{U \times V : \ U \in \mathcal{I}_{x_0}, \ V \in \mathcal{I}_{y_0}\}$$




Questa topologia si chiama **topologia prodotto**.
Se $\mathcal{A}$ è una base per gli aperti di $\tau$ e $\mathcal{B}$ è una base per gli aperti di $\sigma$, allora una base per gli insiemi aperti nella topologia prodotto di $X \times Y$ è data da:

$$\{A \times B : \ A \in \mathcal{A}, \ B \in \mathcal{B}\}$$

Se $X$ e $Y$ sono metrizzabili dalle metriche $d_X$ e $d_Y$, allora la topologia prodotto è metrizzabile ad esempio dalla metrica $d_\infty$ così definita:

$$d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{d_X(x_1,x_2), \ d_Y(y_1,y_2)\}$$

È facile vedere che nella metrica prodotto $d_\infty$ la palla di centro $(x_0,y_0)$ e raggio $r$ è data da:

$$B_{d_\infty}((x_0,y_0),r[ = B_{d_X}(x_0,r[ \times B_{d_Y}(y_0,r[$$

***Osservazione.*** Anche le metriche $d_1$, $d_2$ definite in modo analogo alla metrica del reticolato e alla metrica euclidea inducono la topologia prodotto, ragionando in modo analogo all'osservazione importante di pag. 9 di Spazi metrici.

**Proposizione 15** *Sia $X$ e $Y$ spazi metrizzabili. Per ogni $j \in \mathbb{N}$ sia $p_j = (x_j, y_j)$ un punto di $X \times Y$.*
*Allora $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge a $l = (l_1,l_2)$ se e solo se $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge a $l_1$ e $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge a $l_2$.*

Consideriamo ora le proiezioni canoniche:

$$\mathrm{pr}_X : \ X \times Y \to X, \qquad \mathrm{pr}_Y : \ X \times Y \to Y$$

definite da:

$$\mathrm{pr}_X(x,y) = x, \qquad \mathrm{pr}_Y(x,y) = y$$

(a volte $\mathrm{pr}_1$ e $\mathrm{pr}_2$).
Una funzione si dice **aperta** se manda ogni aperto (del dominio) in un aperto (del codominio).

**Proposizione 16** *Se $X \times Y$ è munito della topologia prodotto, allora le proiezioni canoniche $\mathrm{pr}_X$ e $\mathrm{pr}_Y$ sono funzioni continue e aperte.*

*Dimostrazione.* 1) $\mathrm{pr}_X$ è continua: $\mathrm{pr}_X^{\leftarrow}(A) = A \times Y$.
2) $\mathrm{pr}_X$ è aperta perché manda un intorno di base in un intorno:

$$\mathrm{pr}_X(U \times V) = U$$

□

***Esercizio.*** Osservare che la topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$ è la topologia prodotto.
Dimostrare che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = xy$ è continua e che pertanto $\{(x,y) : \ xy = 1\}$ è chiuso in $\mathbb{R}^2$.
Dedurre che le proiezioni non sono in generale funzioni chiuse (una funzione si dice chiusa se manda chiusi in chiusi).

D'ora in poi il prodotto sarà dotato della topologia prodotto.

*Osservazione.* Siano $X$ e $Y$ spazi topologici e $E$ sottospazio di $X$. La topologia prodotto di $E \times Y$ coincide con la topologia relativa indotta da $X \times Y$.
Sia $x_0 \in X$.
Allora $\{x_0\} \times Y$ è omeomorfo a $Y$ tramite la proiezione $\mathrm{pr}_Y$.

Notazione. Se $g: X \to Y_1 \times Y_2$ è una funzione, allora

$$g(x) = (g_1(x), g_2(x)) \quad \forall\, x \in X$$

ove $g_1 = \mathrm{pr}_1 \circ g$ e $g_2 = \mathrm{pr}_2 \circ g$ sono dette le **componenti** di $g$.
Scriveremo anche:

$$g = (g_1, g_2)$$

Viceversa, se $f_1 : X \to Y_1$ e $f_2 : X \to Y_2$ sono due mappe, si definisce la **mappa diagonale**:

$$(f_1 \times f_2)(x) = (f_1(x), f_2(x))$$

Ogni mappa a valori in un prodotto è la diagonale delle sue componenti.

**Proposizione 17** *Sia $g: X \to Y_1 \times Y_2$ una funzione;*
*$g$ è continua $\iff$ le sue componenti $g_1 = \mathrm{pr}_1 \circ g$ e $g_2 = \mathrm{pr}_2 \circ g$ sono continue.*

*Dimostrazione.*

- Se $g$ è continua allora $g_1$ è continua perché composizione di funzioni continue.
- Se $g_1$ e $g_2$ sono continue, siccome

$$g^{\leftarrow}(U \times V) = g_1^{\leftarrow}(U) \cap g_2^{\leftarrow}(V)$$

si ottiene la continuità di $g$ facendo variare $U$ e $V$ tra gli aperti di $Y_1$ e $Y_2$.

□

La topologia prodotto e i risultati sopra esposti si possono estendere ai prodotti finiti di spazi topologici.
Se $(X_j, \tau_j)_{1 \le j \le m}$ sono spazi topologici, una base per la topologia prodotto sul prodotto cartesiano

$$\prod_{j=1}^{m} X_j$$

è data dagli insiemi del tipo:

$$\prod_{j=1}^{m} A_j, \quad \text{al variare di } A_j \in \tau_j.$$

- Le proiezioni $\mathrm{pr}_j$ sono continue e aperte;
- una funzione $g$ a valori in un prodotto è continua $\iff$ tutte le componenti

$$g_j = \mathrm{pr}_j \circ g$$

sono continue;
- un prodotto di metrizzabili è metrizzabile;

## Esercizi e complementi sul prodotto

***Esercizio.*** Dati $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, dimostrare che:

$$\mathrm{cl}_{X \times Y}(A \times B) = \mathrm{cl}_X(A) \times \mathrm{cl}_Y(B)$$

Dedurre che $A \times B$ è chiuso se e solo se $A$ e $B$ sono chiusi.

***Esercizio.*** Sia $X = \mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea.
La funzione $+ : X \times X \to X$ definita da $(x, y) \to x + y$ è lipschitziana e quindi continua.
La funzione $\mathbb{K} \times X \to X$ definita da $(\lambda, x) \to \lambda x$ è continua.

Dato uno spazio normato $X$, consideriamo la sfera dei versori di $X$:

$$S_X = \{u \in X : \|u\| = 1\}$$

La mappa:

$$\sigma : X \setminus \{0\} \longrightarrow S_X \quad \text{definita da} \quad \sigma(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

si chiama **proiezione radiale** o **segno**.

***Esercizio.*** Dimostrare che la proiezione radiale $\sigma$ è una funzione continua.
Dimostrare che la funzione $p : x \longrightarrow (\|x\|, \sigma(x))$ stabilisce un omeomorfismo di $X \setminus \{0\}$ su $]0, +\infty[ \times S_X$.

***Esercizio.*** Uno spazio topologico $Y$ è di Hausdorff se e solo se la diagonale

$$\Delta_Y = \{(y, y) : \ y \in Y\}$$

è un sottoinsieme chiuso di $Y \times Y$.

Sia $f : X \to Y$ una funzione.
Il grafico di $f$ è il sottoinsieme di $X \times Y$:

$$G = G_f = \{(x, f(x)) : \ x \in X\}$$

Si osservi che $G_f$ è l'antiimmagine della diagonale $\Delta_Y$ tramite la mappa:

$$X \times Y \longrightarrow Y \times Y, \qquad (x, y) \longrightarrow (f(x), y)$$

Se $f$ è continua, quest'ultima mappa è continua.
Perciò, se $Y$ è di Hausdorff ($= \Delta_Y$ chiusa), il grafico è chiuso in $X \times Y$.

**Proposizione 18** *Siano $X$ e $Y$ spazi topologici, $f : X \to Y$ una funzione continua.*
*Allora il grafico $G_f$ (come sottospazio di $X \times Y$) è omeomorfo a $X$ tramite la mappa diagonale*

$$x \to (x, f(x))$$

*Se $Y$ è di Hausdorff, allora $G_f$ è chiuso in $X \times Y$.*

## Compattezza

D'ora in poi tutti gli spazi topologici sono di Hausdorff.
Vedere la dispensina Compattezza.

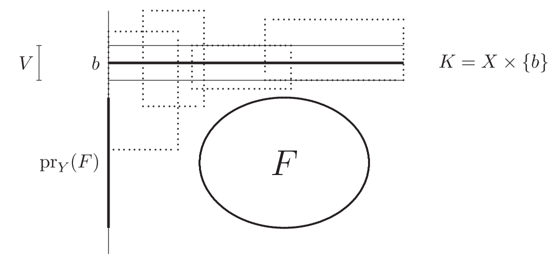
### Spazi compatti e prodotto

Se $F \subseteq X \times Y$, allora la proiezione di $F$ su $Y$ è il sottoinsieme di $Y$ così definito:

$$\mathrm{pr}_Y(F) = \{y \in Y : \ (X \times \{y\}) \cap F \neq \emptyset\}$$

**Teorema 19 (Kuratowski)** *Siano $X$ uno spazio compatto e $Y$ uno spazio di Hausdorff.*
*La proiezione $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ è chiusa.*

*Dimostrazione.* Siano $F$ un chiuso di $X \times Y$ e $b \notin \mathrm{pr}_Y(F)$.
Sia $K = X \times \{b\}$; esso è un sottoinsieme di $X \times Y$ disgiunto da $F$.
Poiché $F$ è chiuso, per ogni $(x, b) \in K$ esistono un intorno aperto $U_x$ di $x$ e un intorno $V_x$ di $b$ tali che $(U_x \times V_x) \cap F = \emptyset$.
Il ricoprimento $\{U_x : \ x \in X\}$ di $X$ ammette un sottoricoprimento finito $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$.




Sia $V = V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n}$. Si ha:

$$X \times V = \left( \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \right) \times V = \bigcup_{i=1}^{n} (U_{x_i} \times V)$$

Poiché ogni termine di quest'ultima unione è disgiunto da $F$, si ottiene $(X \times V) \cap F = \emptyset$ e dunque $V \cap \mathrm{pr}_Y(F) = \emptyset$.
In conclusione, $Y \setminus \mathrm{pr}_Y(F)$ è aperto. $\square$

**Teorema 20 (Tychonoff)** *Siano $X$ e $Y$ spazi compatti. Allora $X \times Y$ è compatto.*

*Dimostrazione.* Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di chiusi di $X \times Y$ con la *fip* e sia $\mathcal{G}$ la famiglia costituita da tutte le intersezioni finite di elementi di $\mathcal{F}$. Allora $\mathcal{G}$ è una famiglia di chiusi non vuoti *chiusa per l'intersezione finita*, cioè contenente le intersezioni di tutte le sue sottofamiglie finite.
Essendo $Y$ compatto, la sottofamiglia di $\mathcal{P}(X)$ costituita da

$$\mathrm{pr}_X(\mathcal{G}) = \{\mathrm{pr}_X(G) : \ G \in \mathcal{G}\}$$

è una famiglia di chiusi (perché?) di $X$ con la *fip*. Infatti:

$$\mathrm{pr}_X(G_1) \cap \mathrm{pr}_X(G_2) \supseteq \mathrm{pr}_X(G_1 \cap G_2) \neq \emptyset$$

Essendo $X$ compatto, la famiglia $\mathrm{pr}_X(\mathcal{G})$ ha intersezione non vuota.
Sia $a \in \bigcap \mathrm{pr}_X(\mathcal{G})$.
Consideriamo in $\{a\} \times Y$ la famiglia delle $a$-sezioni di $\mathcal{G}$, cioè:

$$\mathcal{G}_a = \{G \cap (\{a\} \times Y) : \ G \in \mathcal{G}\}$$

Essa è una famiglia di chiusi di $\{a\} \times Y$ con la *fip*. Infatti, se $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ si ha:

$$(G_1 \cap (\{a\} \times Y)) \cap (G_2 \cap (\{a\} \times Y)) = (G_1 \cap G_2) \cap (\{a\} \times Y)$$

che è non vuoto perché $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$ e quindi $a \in \mathrm{pr}_X(G_1 \cap G_2)$.
Poiché $\{a\} \times Y$ è compatto, si ottiene $\bigcap \mathcal{G}_a \neq \emptyset$ e dunque:

$$\bigcap \mathcal{F} = \bigcap \mathcal{G} \supseteq \bigcap \mathcal{G}_a \neq \emptyset$$

□

## Spazi compatti e funzioni continue

L'immagine continua di uno spazio compatto è uno spazio compatto, cioè:

**Teorema 21** *Se $X$ e $Y$ sono spazi di Hausdorff, con $X$ compatto, e $f : X \to Y$ è continua, allora $f(X)$ è compatto.*

*Dimostrazione.* Sia $\mathcal{V}$ un ricoprimento aperto di $f(X)$.
L'antiimmagine di $\mathcal{V}$, cioè la famiglia

$$\{f^{\leftarrow}(V) : \ V \in \mathcal{V}\}$$

ammette un sottoricoprimento finito, diciamo:

$$\{f^{\leftarrow}(V_1), \ldots, f^{\leftarrow}(V_k)\}$$

Poiché

$$X \subseteq f^{\leftarrow}(V_1) \cup \ldots \cup f^{\leftarrow}(V_k) = f^{\leftarrow}(V_1 \cup \ldots \cup V_k),$$

si ottiene $f(X) \subseteq V_1 \cup \ldots \cup V_k$. □

**Corollario 22 (Teorema di Weierstrass)** *Ogni funzione continua a valori reali definita su un compatto non vuoto ha minimo e massimo assoluti.*

*Dimostrazione.* L'immagine è compatta, quindi chiusa e limitata in $\mathbb{R}$. □

*Osservazione.* In precedenza abbiamo usato questo teorema, applicandolo ai chiusi e limitati di $\mathbb{K}^n$, per dimostrare che un isomorfismo lineare con dominio $\mathbb{K}^n$ ha inverso continuo.

**Corollario 23** *Siano $X$ e $Y$ spazi di Hausdorff con $X$ compatto. Sia $f : X \to Y$ una funzione continua. Allora $f$ è chiusa.*
*Se $f$ è biiettiva, allora $f^{-1}$ risulta continua.*
Morale: una biiezione continua con dominio compatto è un omeomorfismo.

**Teorema 24** *Siano* $X = [a, b]$ *un intervallo compatto della retta reale estesa e* $f : X \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora esistonio* $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$ *tali che* $f(X)) = [\alpha, \beta]$.

*Dimostrazione.* $X$ è connesso e compatto e quindi $f(X)$ è connesso e compatto. Ma i connessi di $\mathbb{R}$ sono intervalli e i compatti di $\mathbb{R}$ sono chiusi e limitati. $\square$

***Esercizio.*** Siano $X$ e $Y$ spazi di Hausdorff con $Y$ compatto, $f : X \to Y$ una funzione. Si supponga che il grafico di $f$

$$G(f) = \{(x, y) : \; y = f(x)\}$$

sia un sottoinsieme chiuso di $X \times Y$.
Dimostrare che $f$ è continua.
*Sugg. Sia* $C$ *chiuso di* $Y$. *Allora:*

$$f^{\leftarrow}(C) = \mathrm{pr}_X((X \times C) \cap G(f))$$