Cognome e nome . . . . Matricola: . . . .

1. Sia a_n il termine generale di una serie a termini positivi. Da quale delle seguenti condizioni segue che la serie è divergente?

☐ $a_n \geq \frac{1}{n}$ per infiniti indici.

☐ $a_n > 2^{-n}$ per infiniti indici.

☐ $a_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ definitivamente.

2. Nel campo complesso l'equazione $\sin z + \cos z = 16 \exp(iz)$:

☐ ha esattamente due soluzioni.

☐ non ha alcuna soluzione.

☐ ha almeno sedici soluzioni.

3. Siano $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile e $c \in \mathbb{R}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

☐ se $f'(c) \neq 0$ allora c non è di estremo locale per f.

☐ se $f'(c) = 0$ allora c è di estremo locale per f.

☐ f ammette un punto di massimo relativo.

4. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente Riemann integrabile. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

☐ f è continua.

☐ se f è positiva allora ogni funzione integrale di f è crescente.

☐ f è limitata.

5. Si supponga che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converga per $z = i + \sqrt{2}$. Allora sicuramente:

☐ essa non può convergere per $z = 2$.

☐ essa deve convergere per $z = i - \sqrt{2}$.

☐ essa deve convergere per $z = 1$.

6. La serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} nz^n$:

☐ converge per $z = \frac{1-i}{2}$.

☐ converge per $z = 2i$.

☐ converge per $z = -i$.

7. La serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$:

☐ converge per $z = \frac{1-i}{3}$.

☐ converge per $z = 1$.

☐ converge per $z = i\pi$.

8. Sia w un numero complesso non nullo con $\operatorname{Re} w = 0$. Allora sicuramente:

☐ $\operatorname{Re} w^3 = 0$.

☐ $\operatorname{Im} w^3 = 0$.

☐ Le radici quadrate di w sono proporzionali a $1 + i$.

9. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n^2 + 3) e^{-n}$:

☐ converge assolutamente.

☐ non converge.

☐ diverge.

10. La derivata di $\arcsin(x - \sin x)$ è:

☐ $\frac{1-\cos x}{\sqrt{1-(x-\sin x)^2}}$.

☐ $\frac{1}{\sqrt{1-(x-\sin x)^2}}$.

☐ $\frac{1-\cos x}{\cos(x-\sin x)}$.

11. La funzione $f(x) = x \exp\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\exp \sqrt{x}\right)$ è, per $x \to +\infty$:

☐ asintotica a $\log(1 + \exp \sqrt{x})$.

☐ asintotica a $\log(1 + \exp x)$.

☐ asintotica a $\arctan x$.

12. L'integrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos^a t}\, dt$ converge

☐ solo per $a < 1$.

☐ per ogni a.

☐ per ogni $a > 0$.

13. Sia $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{1/(x^2+1)}$ se $x \leq 1$, $f(x) = e^{x^2}$ altrimenti e sia $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Allora:

☐ F non è derivabile su tutto $[0,2]$.

☐ F è derivabile e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [0,2]$.

☐ F è derivabile e $F'(x) = f(x) - f(0)$ per ogni $x \in [0,2]$.

14. L'equazione $(\exp it)^4 = -1$:

☐ ha esattamente una soluzione reale.

☐ ha esattamente quattro soluzioni reali.

☐ ha infinite soluzioni reali.

15. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ derivabile in $[0,1]$ e strettamente crescente. Allora sicuramente:

☐ $f'(x) > 0$ per ogni $x \in [0,1]$.

☐ l'insieme degli zeri di f' non contiene punti isolati.

☐ l'insieme degli zeri di f' non contiene insiemi aperti non vuoti.

16. L'integrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^\alpha \log^2 x}\,dx$ esiste finito:

☐ solo per $\alpha = 1$.

☐ solo per $\alpha < 1$.

☐ solo per $\alpha \leq 1$.

17. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{-n}$ converge:

☐ per ogni $x \neq 0$.

☐ sicuramente se $x < -1$.

☐ sicuramente se $x = 0.8$.

18. L'integrale $\displaystyle\int_1^2 \log\left(\frac{x-1}{x}\right)\,dx$:

☐ diverge a $+\infty$.

☐ converge.

☐ diverge a $-\infty$.

19. La successione $a_n = \displaystyle\int_n^{2n} |\sin \pi x|\,dx$:

☐ converge a 0.

☐ diverge a $+\infty$.

☐ converge a π.

Cognome e nome . . . . Matricola: . . . .

1. Sia a_n il termine generale di una serie a termini positivi. Da quale delle seguenti condizioni segue che la serie è convergente?

☐ $a_n < \frac{1}{n}$ per ogni n.

☐ $a_{n+1} \leq a_n^2$ per ogni n e inoltre $a_1 = \frac{1}{2}$.

☐ $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$.

2. Nel campo complesso l'equazione $\sin iz + \exp(z) = 27$:

☐ ammette soluzioni con parte reale uguale a 0.

☐ non ha soluzioni.

☐ ha infinite soluzioni.

3. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

☐ se $f'(x) \neq 0$ per ogni x, allora f è iniettiva.

☐ se f è iniettiva allora $f'(x) \neq 0$ per ogni x.

☐ se f è suriettiva allora l'equazione $f(x) = x$ ammette soluzioni.

4. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente Riemann integrabile e sia F una funzione integrale di f. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

☐ F è continua.

☐ F è limitata.

☐ F è illimitata.

5. Si supponga che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converga per $z = 1 + i$. Allora sicuramente:

☐ essa deve convergere per $z = \frac{1}{3} + i\frac{4}{3}$.

☐ essa deve convergere per $z = i\sqrt{2}$.

☐ essa non può convergere per $z = 2i$.

6. La serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (\arctan n)\, z^n$:

☐ converge per $z = 1$.

☐ converge per $z = \frac{\pi}{3}$.

☐ converge per $z = \frac{1+i}{4}$.

7. La serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{\log n}$:

☐ converge per $z = 2i$.

☐ converge per $z = \frac{1+i}{2}$.

☐ converge per $z = 1$.

8. Sia z un numero complesso di modulo 1. Allora sicuramente:

☐ $z = z^3$.

☐ $\mathrm{Im}(z + z^{-1}) = 0$.

☐ $z + z^{-1} = 0$.

9. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n^2}}{2+\sqrt{n}}$:

☐ è di Leibniz.

☐ non converge.

☐ converge assolutamente.

10. La derivata di $\sin \arccos x$ è:

☐ $\cos\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

☐ $\cos(\arccos x)$.

☐ $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

11. La funzione $f(x) = x^2 \exp\left(-\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\exp\frac{1}{x}\right)\sin x$ è, per $x \to 0^+$:

☐ dello stesso ordine di $\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$.

☐ dello stesso ordine di $1 - \cos\sqrt{x}$.

☐ dello stesso ordine di x^2.

12. L'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} (e^{1/t} - 1)^a \, dt$ converge

☐ per ogni a.

☐ solo per $a > 1$.

☐ solo per $a \geq 1$.

13. Sia $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{x^2}$ se $x \leq 1$, $f(x) = 1/(x^5 + 1)$ altrimenti e sia $F(x) = \int_2^x f(t)\, dt$. Allora:

☐ F è derivabile e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [0,2]$.

☐ F è derivabile e $F'(x) = f(x) - f(2)$ per ogni $x \in [0,2]$.

☐ F è derivabile almeno su $[0,2] \setminus \{0,1,2\}$.

14. L'equazione $\sin(it) = 2i$:

☐ ha esattamente una soluzione reale.

☐ non ha alcuna soluzione reale.

☐ ha infinite soluzioni reali.

15. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ derivabile in $[0,1]$ e sia $f(0) = f(1)$. Allora sicuramente:

☐ f ha un minimo assoluto interno a $[0,1]$.

☐ l'equazione $f'(x) = 0$ ha almeno una soluzione in $]0,1[$.

☐ f è costante.

16. L'integrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^\alpha \log^2 x}\, dx$ esiste finito:

☐ solo per $\alpha = 1$.

☐ solo per $\alpha < 1$.

☐ solo per $\alpha \leq 1$.

17. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n!x^n$ converge:

☐ solo per $x = 0$.

☐ per ogni $x < 1$.

☐ sicuramente se $x = 0.8$.

18. L'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos x^3\, dx$:

☐ diverge a $+\infty$.

☐ converge.

☐ è indeterminato.

19. La successione $a_n = \displaystyle\frac{1}{n}\int_n^{2n} \arctan x\, dx$:

☐ diverge a $+\infty$.

☐ converge a 0.

☐ converge a $\frac{\pi}{2}$.