SPAZI METRICI

Nel piano $\mathbb{R}^2$ o nello spazio $\mathbb{R}^3$ la distanza fra due punti è la lunghezza, o *norma euclidea*, del vettore differenza di questi due punti.
Se $p = (x, y, z)$ è un vettore in coordinate ortonormali, la sua lunghezza è:

$$|p| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Se $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$, la loro distanza è:

$$d(p_1, p_2) = |p_2 - p_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Questa distanza si chiama *metrica euclidea* o *pitagorica*, per distinguerla da altre metriche.

Definizione 1 *Uno spazio metrico è un insieme X fornito di una funzione distanza (=metrica)*

$$d : X \times X \to [0, +\infty[$$

che verifica le seguenti tre condizioni (per ogni coppia di punti):

(D_1) $d(x, y) \geq 0$ *e inoltre* $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

(D_2) $d(x, y) = d(y, x)$

(D_3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Uno spazio metrico X con metrica d si indica con il simbolo (X, d).

Esercizio. Verificare che:

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$$

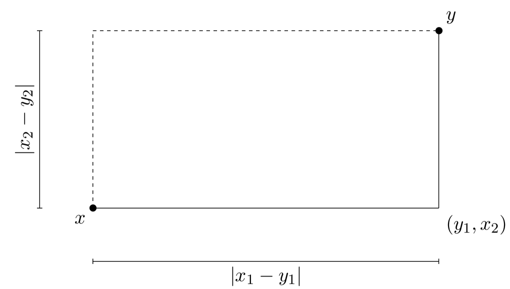
Esempi. $\boxed{\mathbb{R}^n \text{ con la distanza euclidea:}}$

$$\begin{aligned} d_2(x, y) &= |y - x| = \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2}, \end{aligned}$$

ove $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

È difficile verificare la disuguaglianza triangolare.
$\boxed{\mathbb{R}^2 \text{ con la metrica del reticolato (o di Manhattan):}}$

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \qquad \text{ove } x = (x_1, x_2) \text{ e } y = (y_1, y_2).$$



$\boxed{\mathbb{R}^2 \text{ con la metrica del sup:}}$

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|,\ |x_2 - y_2|\}, \qquad \text{ove}\ldots$$

$\boxed{\text{Distanza geodetica in } \mathbb{S}^2\text{, sfera dei versori di } \mathbb{R}^3.}$

$$\mathbb{S}^2 = \{u \in \mathbb{R}^3 :\ |u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = 1\}$$

$$d(u, v) = \arccos(u \cdot v)$$

Si tratta della lunghezza del minore fra i due archi di cerchio massimo di estremi u e v.

Metrica discreta su un insieme E.

Si fissa una costante $\alpha > 0$ e si definisce per $x \neq y$:

$$d(x,y) = \text{un qualsiasi numero } \geq \alpha \text{ in modo che valga } (D_3)$$

Ad esempio: $d(x,y) = \alpha \quad \forall\, x \neq y$.

Siano E un insieme e $g : E \to \mathbb{R}$ una funzione iniettiva.
La posizione

$$d_g(x,y) = |g(x) - g(y)|$$

definisce una metrica su E.

Definizione 2 *Se $S \subseteq X$ e d è una metrica su X, allora $d_S = d_{|S\times S}$ è una metrica su S, detta metrica indotta, e (S, d_S) si dice sottospazio metrico di (X,d).*

Scriveremo sempre (S,d).

Esempio. La metrica indotta su $\mathbb{Z}^2$ dalla metrica euclidea di $\mathbb{R}^2$ è discreta, $\alpha = 1$.

Definizione 3 *Dati uno spazio metrico (X,d), un punto $a \in X$ e un numero reale $r > 0$, si definiscono:*

- *palla aperta di centro a e raggio r:*

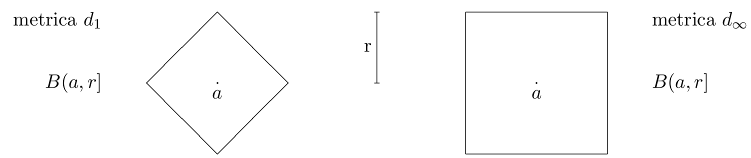
$$B(a,r[= \{x \in X :\ d(a,x) < r\}$$

- *palla chiusa di centro a e raggio r:*

$$B(a,r] = \{x \in X :\ d(a,x) \leq r\}$$

Se necessario si usa B_d in luogo di B.

Esercizio. Disegnare le palle in $\mathbb{R}^2$ con le metriche d_2, d_1 e d_∞.



Domande. Chi sono le palle (aperte e chiuse) nella metrica discreta? Chi sono le palle nella metrica geodetica della sfera? Quali sono le palle (aperte e chiuse) di raggio π?

Definizione 4 *Siano (X,d) e (Y,ρ) spazi metrici.*
Una funzione $f : X \to Y$ si dice ***lipschitziana*** *se esiste una costante $l \geq 0$ tale che:*

$$\rho(f(x), f(y)) \leq l \cdot d(x,y), \quad \forall\, x, y \in X$$

l è detta costante di Lipschitz.

Esercizio. L'estremo inferiore delle costanti di Lipschitz per una funzione lipschitziana è ancora una costante di Lipschitz.
Essa si chiama **la** costante di Lipschitz.

Su $\mathbb{R}$ si considera sempre la metrica $|t - s|$.

Esercizi.

- $\sin x$ e $\cos x$ sono funzioni lipschitziane.
- Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile.
  Dimostrare che f è lipschitziana $\iff$ f' è limitata.
- Sia $X = \mathbb{R}^n$ con la distanza definita da $|x - y| = ((x-y)\cdot(x-y))^{\frac{1}{2}}$.
  Allora $x \to |x|$ è una funzione lipschitziana da X in $[0, +\infty[$
  (segue da $||x| - |y|| \leq |x - y|$).

Definizione 5 *Siano (X,d) uno spazio metrico e A un sottoinsieme non vuoto di X.*
Si consideri la funzione $d(\cdot, A): X \to [0,+\infty[$, detta ***distanza da*** *A, definita ponendo per ogni $x \in X$:*

$$d(x,A) = \inf\{d(x,y) : \ y \in A\}$$

Proposizione 6 *Si ha:*

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$$

Dimostrazione. Basta dimostrare che $d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A)$.
Poiché $d(x,A) \leq d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a) \quad \forall\, a \in A$, passando all'$\inf_{a\in A}$ a destra, si ottiene quanto voluto. □

Definizione 7 *Il diametro di un sottoinsieme $A \neq \emptyset$ di uno spazio metrico (X,d) è:*

$$\operatorname{diam} A = \sup\{d(x,y) : \ x, y \in A\}, \quad \textit{dove il sup può essere anche } +\infty$$

Si pone $\operatorname{diam} \emptyset = 0$.
Un sottoinsieme si dice limitato se ha diametro finito (cioè $\in \mathbb{R}$).

Esercizi.

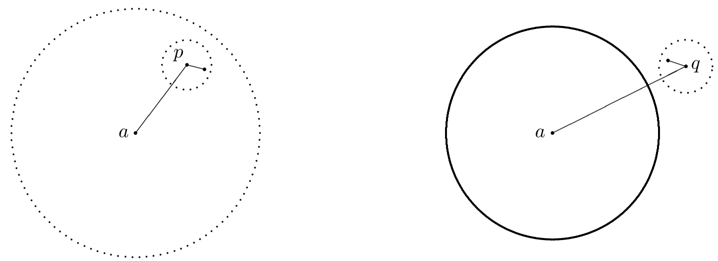
- Il diametro di una palla di raggio $r > 0$ è $\leq 2r$.
  Dare un esempio in cui il diametro è strettamente $< 2r$.
  Dimostrare che in $\mathbb{R}^n$ munito di una qualunque delle metriche d_1, d_2, d_∞, tale diametro è esattamente $2r$.
- Un sottoinsieme è limitato $\iff$ è contenuto in una palla.
- Un'unione finita di sottoinsiemi limitati è un sottoinsieme limitato.
- Sia $A = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$.
  Trovare il diametro di A in d_2, d_1, d_∞.
  Sia $E = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ |x| = \|x\|_2 = r\}$.
  Chi è il diametro di E in d_∞? E in d_1?

Topologia di uno spazio metrico

La topologia serve per dare nozioni di *vicinanza* e di *convergenza.*

Definizione 8 *Siano (X,d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$.*
A si dice aperto se è vuoto oppure se è unione di palle aperte.
La topologia dello spazio metrico (X,d) è la famiglia τ_d, o più semplicemente τ, costituita da tutti i sottoinsiemi aperti.
La coppia (X,τ) è detta ***spazio topologico metrizzabile****.*
Un insieme si dice ***chiuso*** *se il suo complementare è un insieme aperto.*

Esercizio. Se $p \in B(a,r[$ e $s \leq r - d(p,a)$, allora $B(p,s[\subseteq B(a,r[$.
Se $q \notin B(a,r]$ e $t \leq d(q,a) - r$, allora $B(q,t[\cap B(a,r] = \emptyset$.
Prima conseguenza: ogni palla chiusa è un insieme chiuso.



Seconda conseguenza dell'esercizio precedente.

Proposizione 9 *A è aperto $\iff$ per ogni $p \in A$ esiste un numero reale $\delta > 0$ tale che $B(p,\delta[\subseteq A$.*

Dimostrazione. Sufficienza: immediata.
Necessità. Sia $p \in A$ con A insieme aperto.
Esiste una palla aperta $B(a,r[$ tale che $p \in B(a,r[\subseteq A$.
Sia $s \leq r - d(p,a)$. Per l'esercizio precedente si ottiene:

$$B(p,s[\subseteq B(a,r[\subseteq A$$

□

Proposizione 10 *La topologia τ di uno spazio metrico soddisfa le seguenti proprietà:*

(A$_1$) *$\emptyset, X \in \tau$;*

(A$_2$) *se $A_\lambda \in \tau$ per ogni $\lambda \in \Lambda$, allora:*

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \tau$$

***ogni unione arbitraria di aperti è un aperto**.*

(A$_3$) *se $A_1, \dots, A_m \in \tau$, allora:*

$$A_1 \cap \cdots \cap A_m \in \tau$$

***ogni intersezione finita di aperti è un aperto**.*

Dimostrazione. (A_1) ovvia.
(A_2) unione di unioni di palle aperte…
(A_3). Basta dimostrarlo per due insiemi aperti A_1 e A_2; useremo la prop. 9.
Sia $p \in A_1 \cap A_2$. Esistono allora $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ tali che:

$$B(p, r_1[\subseteq A_1, \qquad B(p, r_2[\subseteq A_2$$

Supponiamo $r_1 \leq r_2$. Allora ovviamente $B(p, r_1[\subseteq A_1 \cap A_2$. □

Esercizio. Mostrare con un esempio che un'intersezione arbitraria di insiemi aperti non è in generale un insieme aperto.

Definizione 11 *Un sottoinsieme C di X si dice chiuso se il suo complementare*

$$X \setminus C = \{x \in X : \ x \notin C\}$$

è un aperto.

Esercizio. I *singoletti* (insiemi del tipo $\{x\}$) sono insiemi chiusi.

Dalla dualità di De Morgan si ottengono le seguenti proprietà dei chiusi:

(C$_1$) $X, \emptyset$ sono chiusi;
(C$_2$) se C_λ è chiuso per ogni $\lambda \in \Lambda$, allora $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$ è chiuso;
(C$_3$) se $C_1, \dots, C_m$ sono chiusi, allora $C_1 \cup \cdots \cup C_m$ è chiuso.

Esercizio. Mostrare con un esempio che un'unione arbitraria di insiemi chiusi non è in generale un insieme chiuso.

Definizione 12 *Uno **spazio topologico** (X, τ) è una coppia costituita da un insieme X e da una famiglia $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ di sottoinsiemi di X soddisfacente agli assiomi* (A$_1$), (A$_2$), (A$_3$).
τ è detta topologia di X;
i suoi elementi sono gli aperti di X.

Definizione 13 *Un sottoinsieme U di X si dice **intorno** di un punto $p \in X$ se esiste un aperto A tale che:*

$$p \in A \subseteq U$$

cioè U deve contenere un insieme aperto che contiene p.

Proposizione 14 *un insieme è aperto se e solo se è intorno di ogni suo punto*

Dimostrazione. Se A è aperto, per ogni $p \in A$ si ha $p \in A \subseteq A$, cioè A contiene sé stesso come intorno aperto che contiene p.
Viceversa, se $\forall\, p \in A$ si ha che A è intorno di p, allora per ogni $p \in A$ esiste un aperto U_p tale che $p \in U_p \subseteq A$. Allora A è unione degli aperti U_p perché:

$$\bigcup_{p\in A} U_p \subseteq A \subseteq \bigcup_{p\in A} \{p\} \subseteq \bigcup_{p\in A} U_p$$

□

Corollario 15 *Se due topologie hanno gli stessi intorni allora coincidono.*

Dimostrazione. Essere intorno di p per ogni $p \in A$ è la stessa cosa per entrambe le topologie, visto che hanno gli stessi intorni. □

La famiglia $\mathcal{I}_p$ di tutti gli intorni di p si chiama *filtro degli intorni di p*.

Proprietà di $\mathcal{I}_p$:

(I_1) $\forall\, U \in \mathcal{I}_p$ si ha $p \in U$;

(I_2) se $U \in \mathcal{I}_p$ e $U \subseteq V \subseteq X$, allora $V \in \mathcal{I}_p$;

(I_3) se $U, V \in \mathcal{I}_p$, allora $U \cap V \in \mathcal{I}_p$;

(I_4) se $U \in \mathcal{I}_p$ allora esiste $A \subseteq U$ con $p \in A$ e tale che $A \in \mathcal{I}_x$ per ogni $x \in A$.

(I_5) Se $p, q \in X$, con $p \neq q$, esistono intorni U_p di p e U_q di q tali che $U_p \cap U_q = \emptyset$.

La proprietà (I_5) dice che ogni spazio metrico è uno spazio di Hausdorff.

Quando si parla di $\mathbb{R}^n$ si intende con la topologia *usuale* o euclidea, cioè quella indotta dalla metrica euclidea $|x - y|$.

La dimostrazione della prossima proposizione è molto standard e si lascia come esercizio.

Proposizione 16 *Siano X uno spazio metrico e p un punto di X. Le seguenti affermazioni sono equivalenti per un sottoinsieme U di X.*

a) U è intorno di p.

b) Esiste un numero reale $\delta > 0$ tale che $B(p, \delta] \subseteq U$.

c) Esiste un numero reale $\delta > 0$ tale che $B(p, \delta[\subseteq U$.

d) Esiste $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tale che $B(p, \frac{1}{n}[\subseteq U$.

Osservazione importante In $\mathbb{R}^2$ si considerino le metriche d_1, d_2, d_∞. Non è difficile dimostrare che:

$$d_\infty \leq d_2 \leq \sqrt{2} d_\infty \quad \text{e inoltre} \quad d_\infty \leq d_1 \leq 2 d_\infty$$

Usando queste disuguaglianze, si dimostra che ogni palla aperta in una di queste metriche contiene una palla aperta con lo stesso centro in una qualsiasi delle altre due. Pertanto le tre metriche definiscono gli stessi intorni e quindi la stessa topologia, che è dunque la topologia euclidea indotta dalla metrica d_2. Poiché le palle nella metrica d_∞ sono quadrati aperti e poiché un rettangolo

aperto è sempre unione di quadrati aperti, si ottiene che la topologia euclidea coincide con la topologia prodotto definita in [GDM, 8.2.1].

Sia $A \subseteq X$. Si dice **chiusura di A in X**, e si indica con $\overline{A}$ o con $\mathrm{cl}_X(A)$, il seguente insieme:

$$\overline{A} = \bigcap \{C : \; C \supseteq A, \; C \text{ chiuso in } X\}$$

È il più piccolo chiuso che contiene A.
Proprietà:

(Cl_1) $\forall\, A \subseteq X$ si ha $A \subseteq \overline{A}$;

(Cl_2) se $A, B \subseteq X$ allora $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(Cl_3) per ogni $A \subseteq X$ si ha $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

Esercizio. Dopo aver osservato che in $\mathbb{R}$ ogni intervallo aperto non vuoto contiene numeri razionali,
dedurre che $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
È vero che $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$?

Esercizio. Dimostrare che $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$,
e che l'inclusione può essere stretta.

Fatti.

- Se $A \subseteq G$ e G è chiuso allora $\overline{A} \subseteq G$.
- Se V è aperto e $V \cap \overline{A} \neq \emptyset$ allora $V \cap A \neq \emptyset$.

Proposizione 17 *Siano $p \in X$ e $A \subseteq X$. Allora:*

$p \in \overline{A}$ se e solo se per ogni intorno U di p si ha $U \cap A \neq \emptyset$.

Importante Siano d la metrica che induce la topologia di X e $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Allora:

$$\overline{A} = \{x \in X : \; d(x, A) = 0\}$$

Si dice **interno di** A, indicato con $\mathring{A}$ oppure $\mathrm{int}_X(A)$:

$$\mathring{A} = \bigcup \{U : \; U \subseteq A, \; U \text{ aperto in } X\}$$

$\overset{\circ}{A}$ è il massimo sottoinsieme aperto contenuto in A.
Se $p \in \overset{\circ}{A}$, allora p si dice interno ad A.
Fatto: $X \setminus \overline{A} = \operatorname{int}(X \setminus A)$.
Un punto p si dice **di frontiera** per A se $p \in \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$. Si chiama **frontiera di** A e si indica con $\operatorname{fr}_X(A)$ o ∂A l'insieme dei punti di frontiera per A.

Fatti.

- $\operatorname{fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \operatorname{fr}(X \setminus A)$.
- $\overline{A} = A \cup \operatorname{fr} A$.
- $p \in \operatorname{fr} A \iff \forall\, U \in \mathcal{I}_p$ si ha $U \cap A \neq \emptyset$ e $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.
- $\operatorname{fr} A$ è un insieme chiuso.
- Un insieme è chiuso se e solo se contiene la propria frontiera.
- $p \in \overset{\circ}{A} \iff \exists\, V \in \mathcal{I}_p$ tale che $V \subseteq A$.
- $\overset{\circ}{A} = A \setminus \operatorname{fr} A$.

Definizione 18 *Un punto $p \in X$ si dice **punto di accumulazione** per un sottoinsieme A di X se ogni intorno U di p contiene punti di A diversi da p.*
*Un punto $p \in A$ si dice **isolato** in A se non è di accumulazione per A.*

Fatti:

- L'insieme dei punti di accumulazione per A si chiama **derivato** di A e si indica con A'. Si ha:
$$\overline{A} = A \cup A'$$
- Il punto p è di accumulazione per A se e solo se ogni intorno di p contiene infiniti punti di A.

Esercizio. Trovare la chiusura, l'interno, la frontiera, il derivato e l'insieme dei punti isolati dei seguenti insiemi:

$$\begin{array}{ll}
A \subseteq \mathbb{R} & A = \mathbb{Q} \cap]0,1[\cup \{2\} \\
A \subseteq \mathbb{R} & A =]-\infty, 0[\cup \{1\} \\
A \subseteq \mathbb{R}^2 & A = \mathbb{Q}^2 \cap ([0,1] \times [0,1]) \\
A \subseteq \mathbb{R} & A = \{m + \frac{1}{n} :\ m \in \mathbb{Z},\ n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}\} \\
A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} & A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}
\end{array}$$

Definizione 19 *Un sottoinsieme $D \subseteq X$ si dice **denso** in X se una delle seguenti condizioni equivalenti è soddisfatta:*

1) $\overline{D} = X$.

2) Ogni aperto non vuoto contiene punti di D.

Ad esempio, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono entrambi densi in $\mathbb{R}$.

Esercizio. L'intersezione di due aperti densi è aperto e denso.

Definizione 20 *Sia $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una successione di punti di X e sia $p \in X$. Si dice che $\lim x_j = p$ se per ogni intorno U di p esiste $\bar{j} \in \mathbb{N}$ tale che $x_j \in U$ per ogni $j \geq \bar{j}$*

cioè se la successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sta definitivamente in ogni intorno di p.
Fatto.
$$\lim_X x_j = p \iff \lim_{\mathbb{R}} d(x_j, p) = 0$$

Esercizio importante. Sia $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una successione di punti dello spazio metrico X convergente a un punto $p \in X$.
Sia $E = \{x_j :\ j \in \mathbb{N}\}$ l'insieme dei valori della successione. Dimostrare che:

- $E \cup \{p\}$ è un insieme compatto.
- $\overline{E} = E \cup \{p\}$.
- Se $p \notin E$ allora i punti di E sono tutti isolati e $p \in E'$.

Teorema 21 *Sia (X, τ) spazio metrizzabile e siano $p \in X$ e $A \subseteq X$. Allora:*

- $p \in \overline{A} \iff$ *esiste una successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ con $x_j \in A\ \forall\ j$ tale che* $\lim x_j = p$.
- $p \in A' \iff$ *esiste una successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ con $x_j \in A \setminus \{p\}\ \forall\ j$ tale che* $\lim x_j = p$.
  In questo caso la successione si può prendere iniettiva.

Dimostrazione. È analoga alla dimostrazione di [**GDM, 10.3.1 e 10.4.1**]. □

Corollario 22 *Un sottoinsieme di uno spazio metrizzabile è chiuso se e solo se contiene i limiti delle sue successioni convergenti.*

Proposizione 23 *Siano X uno spazio di Hausdorff, $K \subseteq X$ un sottospazio compatto, $p \in X \setminus K$.*
Esistono un intorno aperto V di p e un aperto A contenente K tali che $V \cap A = \emptyset$.

Dimostrazione. Per ogni $x \in K$ esistono un intorno aperto V_x di p e un intorno aperto U_x di x tali che $V_x \cap U_x = \emptyset$.
La famiglia $\mathcal{U} = \{U_x :\ x \in K\}$ è un ricoprimento aperto di K che ammette un sottoricoprimento finito $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$.
Gli aperti richiesti sono:

$$V = V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n} \qquad A = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$$

□

Esercizio. In uno spazio di Hausdorff, due insiemi compatti disgiunti sono contenuti in aperti disgiunti.

Proposizione 24 *Siano X uno spazio di Hausdorff e K un suo sottospazio compatto: allora K è chiuso.*
Se X è metrico, allora K risulta anche limitato.

Dimostrazione. Sia $p \notin K$; scelti gli aperti V e A come nella prop. (23), si ha $V \subseteq X \setminus A \subseteq X \setminus K$. Poiché per ogni punto $p \notin K$ l'insieme $X \setminus K$ contiene un intorno aperto di p, si ottiene che $X \setminus K$ è aperto e quindi K è chiuso.
Se X è metrico la famiglia di tutte le palle aperte è ovviamente un ricoprimento aperto di K; Poiché K è compatto, da questo ricoprimento si può estrarre un sottoricoprimento finito di palle. Poiché le palle sono insiemi limitati, si ha che K è limitato perché contenuto in un'unione finita di limitati. □