Analisi Matematica 1 per Matematica

Compito 1.

Esercizio 1. Si consideri la funzione di variabile reale

$$f(x) = \frac{x-1}{\log x}$$

- Trovare il dominio $X \subseteq \mathbb{R}$. Si dica perché f è continua.
- Dimostrare che $f(x) \neq 1$ per ogni $x \in X$.
- Discutere il segno e i limiti nei punti di frontiera di X in $\tilde{\mathbb{R}}$.
- Trovare l'immagine di f.
- Si dica perché il grafico di f è chiuso in $X \times \mathbb{R}$. Trovare la chiusura del grafico di f in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- Si dica perché il grafico di f non è connesso.
  Dimostrare che la chiusura in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ del grafico di f è un sottoinsieme connesso.

Esercizio 2. Sia I un intervallo non banale di $\mathbb{R}$ e siano A e B due chiusi di I, ognuno costituito da almeno due punti e tali che $A \cup B = I$. Si supponga inoltre che $A \cap B$ consista di un solo punto $c \in I$.
Sia $a_1 \in A$, $a_1 \neq c$. Dimostrare che se $a_1 < c$ allora:

$$A = I \cap]-\infty, c] \quad \text{e} \quad B = I \cap [c, +\infty[.$$

Secondo compito.

Esercizio 1. Studiare la convergenza delle seguenti successioni reali, determinandone i limiti delle sottosuccessioni convergenti (giustificare le risposte).

$$(-1)^n + \tfrac{\exp n}{n!} \qquad\qquad (\tfrac{n}{2+n})^{n^2}$$

$$\sqrt[7]{n^2+1} - \sqrt[7]{n^2-1} \qquad\qquad \tfrac{2^n}{n}$$

Esercizio 2. Sia L una retta del piano euclideo. Dimostrare che L è un sottoinsieme chiuso e connesso.
Siano ora L_1 e L_2 due rette del piano euclideo e sia $E = L_1 \cup L_2$.

- Dire perché E è chiuso. Dire perché E non è compatto. Dimostrare che E è connesso se e solo se $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$.
- Dimostrare che E non può essere omeomorfo a un intervallo della retta reale.

Terzo compito.

Esercizio 1. Sia (p_n) una successione di punti di uno spazio di Hausdorff X e sia $q \in X$. Si dica cosa significa che $\lim_n p_n = q$.
Usando il fatto che X è di Hausdorff, dimostrare che il limite è unico.
Sia $X = \mathbb{R}$ e sia
$$p_n = \sqrt[2n]{\frac{n}{n+1}} \qquad \forall\ n \geq 1$$
Determinare il limite della successione (p_n).

Esercizio 2. Dire cosa significa che uno spazio topologico è connesso.
Quali sono i connessi di $\mathbb{R}$? (senza dim.)
Dimostrare che una funzione continua trasforma connessi in connessi.
Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che il grafico di f è connesso se e solo se X è un intervallo.
Dimostrare che il grafico di f è compatto se e solo se X è compatto.

Quarto compito

Esercizio 1. Sia E un sottoinsieme di uno spazio topologico X e sia $p \in X$.
Si dica cosa vuol die che p è di accumulazione per E.
Sia ora $X = \mathbb{C}$ e, per ogni reale $\alpha > 0$, si consideri il sottoinsieme E_α così definito:
$$E_\alpha = \{ \left(\alpha + \frac{i}{2}\right)^n + n^{\frac{1}{n}} \ : \ n \in \mathbb{N}^{\geq 2} \}$$
Trovare, al variare di $\alpha > 0$, il derivato di E_α.

Esercizio 2. Sia Y uno spazio topologico di Hausdorff e sia X un sottospazio topologico di Y.

- Dimostrare che se X è compatto e $p \in Y \setminus X$, allora esistono un aperto $U \supseteq X$ e un aperto $V \supseteq \{p\}$ tali che $U \cap V = \emptyset$.
- Dimostrare che se X è chiuso in Y e Y è compatto allora X è compatto.

Quinto compito

Esercizio 1. Dare la definizione di funzione continua fra spazi topologici, fornendo condizioni equivalenti (senza dim.).
Sia $f : X \to Y$ una funzione fra spazi topologici. Siano E e F due sottoinsiemi chiusi di X tali che $E \cup F = X$ e inoltre le restrizioni $f \restriction E$ ed $f \restriction F$ siano entrambe continue. Dimostrare che f è continua.

Esercizio 2. Sia $\beta > 0$ un parametro reale. Si consideri la funzione $f_\beta : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ così definita:
$$f_\beta(x) = \begin{cases} (1-x)^{\frac{1}{x}} & \text{se } x < 0 \\ \frac{\sin x}{\log(1+\beta x)} + x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$
Dimostrare che f_β è continua per ogni valore del parametro $\beta > 0$.
Determinare il valore di β per cui f_β si estende per continuità in 0. Sia g tale estesa.
Dimostrare che g ammette valore minimo assoluto. Detto c tale valore minimo, dimostrare che $g(\mathbb{R}) = [c, +\infty[$.