Analisi Matematica 1 per Matematica
Esempi di compiti, secondo trimestre 2010/2011

Primo compito.

Esercizio 1. Studiare la funzione

$$y = f(x) = \log(1 + e^{3x}) - 2x$$

e disegnarne il grafico.
È vero che la funzione ha minimo positivo?.
È vero che l'area della regione piana compresa fra il grafico della funzione e i suoi asintoti è finita? Motivare la risposta.
Si determini il polinomio di Taylor di terzo grado di $f(x)$ con punto iniziale 0.

Esercizio 2. Per ogni $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ sia:

$$I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

Aggiungendo e sottraendo x^2 al numeratore e poi integrando per parti, trovare una formula ricorsiva per I_n.
Usare tale formula per calcolare:

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

Dedurre infine:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + x + x^2\right)^2} dx$$

Secondo compito.

Esercizio 1. Sia $f(x)$ una funzione derivabile su un intervallo J. Enunciare e dimostrare una proposizione che stabilisca la relazione fra il segno della derivata prima e la monotonia di f.
Dimostrare che la funzione

$$f(x) = x^3 + x - 1$$

ha esattamente uno zero reale.

Esercizio 2. Si dica quali delle seguenti serie numeriche sono convergenti e perché; nel caso di convergenza determinare la somma.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (3^{-n} + 4^{-n}) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2}{n} - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right] \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-\frac{1}{n}}$$

Terzo compito.

Esercizio 1. Sia f una funzione continua su un intervallo I e sia $c \in I$.
Si definisca la funzione integrale di f con punto iniziale c.
Dimostrare che tale funzione integrale è derivabile e ha per derivata f.
Calcolare:

$$\int_0^\pi \frac{1}{a + b\cos x} dx \quad \text{ove } 0 < a < b$$

Esercizio 2. Trovare i punti della curva $x^2 y = 16$ che hanno minima distanza dall'origine.

Quarto compito.

Esercizio 1. Si consideri la cicloide di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = a(\vartheta - \sin\vartheta) \\ y = a(1 - \cos\vartheta) \end{cases}$$

Dopo aver calcolato $\frac{dx}{d\vartheta}$ e $\frac{dy}{d\vartheta}$ si dica perché nel grafico della cicloide la variabile y si può esplicitare in funzione di x.
Ricavare $\frac{dy}{dx}$ in funzione di ϑ e disegnare il grafico della cicloide.
Dimostrare che la retta tangente nei punti corrispondenti a $\vartheta_k = 2k\pi$ è verticale.
Trovare infine la lunghezza e l'area sottesa da un arco completo di cicloide.

Esercizio 2. Dimostrare che una serie di numeri reali assolutamente convergente è convergente.
Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza delle seguenti serie e determinarne la somma nell'insieme di convergenza.

$$x + \frac{x}{1+x} + \frac{x}{(1+x)^2} + \cdots + \frac{x}{(1+x)^n} + \cdots$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \cdots + \frac{1}{nx^n} + \cdots$$

Quinto compito.

Esercizio 1. Enunciare e dimostrare la regola della catena.
Un cubo di ghiaccio si sta sciogliendo mantenendo la propria forma. Se il volume diminuisce ad una velocità di 6 cm^3/sec, a quale velocità diminuisce la superficie quando lo spigolo misura 12 cm?

Esercizio 2. Dimostrare che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = \int_x^0 \frac{\log(1-t)}{t} dt \qquad \forall\, x \in [-1, 1]$$

Sesto compito.

Esercizio 1. Si consideri l'ellisse Γ di equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{ove } 0 < b < a.$$

Determinare l'equazione della retta tangente all'ellisse in un suo punto (x_0, y_0).
Sia ora $p = (x_0, y_0) \in \Gamma$ tale che $x_0 y_0 \neq 0$. Fra tutti i triangoli individuati dalla retta tangente in P e dagli assi cartesiani, determinare quello di area minima.
Esprimere la lunghezza dell'ellisse mediante un integrale.

Esercizio 2. Dimostrare che il numero di Nepero e è irrazionale.

Settimo compito.

Esercizio 1. Siano $P(x, y)$ un punto del primo quadrante appartenente all'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e $P'(x, -y)$ il suo simmetrico rispetto all'asse x.
Calcolare l'area s del settore iperbolico limitato dall'arco di iperbole PP' e dai raggi OP, OP', dopo aver fatto un disegno.
Dimostrare che per tale area sussiste la formula:

$$s = ab \log \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)$$

Esercizio 2. Determinare il valore del parametro reale $a > 1$ per cui la curva $y = a^x$ è tangente alla retta $y = x$.

Ottavo compito.

Esercizio 1. Trovare lo sviluppo asintotico di $\sqrt{x^2 - x}$ per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$, a meno di $o(x^{-2})$.
Ricavare da tale sviluppo le equazioni degli asintoti della funzione stessa.
Studiare la funzione:

$$y = \sqrt{|x^2 - x|},$$

disegnandone il grafico e avendo cura di determinare i limiti di $\frac{dy}{dx}$ nei punti di non derivabilità.
Dire inoltre se l'area della parte di piano compresa fra la curva, l'asintoto a $+\infty$ e la retta $x = 1$ è finita o meno.
Calcolare infine:

$$\int_0^1 y \, dx$$

Esercizio 2. Dimostrare che la serie:

$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3} - 1} - \frac{1}{\sqrt{3} + 1} + \cdots +$$

non converge. Spiegare perché questo fatto non contraddice il criterio di Leibniz.

Nono compito.

Esercizio 1.

- Discutere al variare di $p \in \mathbb{R}$ il carattere della serie:

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$$

- Sia $\alpha > 0$. Usando il criterio di Raabe, dimostrare che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}$$

è assolutamente convergente. Dimostrare poi che:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n} = 0$$

e che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} = 2^\alpha$$

Esercizio 2. Sia $a > 0$. Determinare la lunghezza dell'arco di catenaria di equazione

$$ay = \cosh ax \qquad \text{con } x \in [-a, a]$$

Decimo compito.

Esercizio 1. Sia $0 < \vartheta_0 < \pi$, ove ϑ_0 è un valore iniziale del parametro angolare ϑ. Il periodo del pendolo tautocrono di Huygens è dato da:

$$T = \int_{\vartheta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{a(1 - \cos \vartheta)}{g(\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta)}} d\vartheta$$

Dimostrare che T è indipendente dalla scelta del valore iniziale ϑ_0 e che si ha:

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$$

Esercizio 2. Studiare la funzione:

$$f(x) = \frac{x \log x}{x^2 - 1}$$

Undicesimo compito.

Esercizio 1. Sia $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^{>0}$ una funzione positiva e decrescente.

- Dire perché f è localmente Riemann integrabile.
- $\forall\, n = 1, 2, \dots$ sia $a_n = f(n)$. Considerare la successione:

$$F(n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n - \int_1^n f(t)\, dt$$

  Dimostrare che $F(n) \geq 0$ e inoltre che la successione $F(n)$ è decrescente (fare un disegno).
- Sia $s > 1$. Usare il fatto precedente per dimostrare che esiste una costante $\gamma_s > 0$ tale che:

$$1 + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} = \frac{1}{s-1}\,\frac{n^{s-1} - 1}{n^{s-1}} + \gamma_s + o(1)$$

Esercizio 2. Un dipinto è appeso a una parete con la base che si trova a metri sopra il livello dell'occhio dell'osservatore. Se il dipinto ha un'altezza di b metri e l'osservatore è a una distanza di x metri dalla parete, mostrare che l'angolo ϑ sotteso dal dipinto è dato dalla formula:

$$\vartheta = \arctan \frac{a+b}{x} - \arctan \frac{a}{x} \qquad \text{(fare un disegno!)}$$

Quale valore di x rende massimo questo angolo?

Dodicesimo compito.

Esercizio 1.

- Risolvere nel campo complesso le seguenti equazioni:

$$e^z = -2 \qquad \sin z = 2 \qquad \cosh z = 0 \qquad \cos z = i$$

- Trovare i termini di grado minore o uguale di 3 nello sviluppo in serie di potenze delle seguenti funzioni:

$$e^z \sin z \qquad \frac{e^z - 1}{z} \qquad \frac{e^z - \cos z}{z} \qquad \frac{z}{e^z - 1}$$

Esercizio 2.

- Trovare la retta normale alla curva di equazione cartesiana

$$y^2 - 4xy = 12$$

  nel punto $(1, 6)$.
- Enunciare e dimostrare la proprietà di riflessione dell'ellisse.

Tredicesimo compito.

Esercizio 1.

- Trovare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze complesse:

$$\sum n^n z^n \qquad \sum 2^{-n} z^n \qquad \sum \frac{n!}{n^n} z^n \qquad \sum n^2 z^n$$

- Trovare l'insieme di convergenza e la somma delle seguenti serie di potenze reali:

$$1 + \frac{x}{2!} + \frac{n^2}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \cdots \qquad 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + 25x^4 + \cdots$$

- Dimostrare che

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \arctan x \qquad \forall\, x \in [-1, 1]$$

Esercizio 2.

- In un arco della curva cartesiana

$$x^3 + y^3 = a^3$$

  in cui y è esplicitabile in funzione di x, trovare un'espressione per y'' in funzione di (x, y).

- Una quantità di grano viene versata su uno spiazzo piatto alla velocità costante di 36 dm^3/min. Se il mucchio di grano ha sempre forma conica con altezza pari a metà del raggio di base, a quale velocità aumenta l'altezza quando il raggio di base è 12 dm?