Analisi Matematica 1 per Matematica
Esercizi prima settimana

$\boxed{\mathbf{1}}$ Svolgere gli esercizi della prima settimana (corso Matematica 1 per Fisica).

$\boxed{\mathbf{2}}$ Risolvere le disequazioni

$$\cos x < \cos 1 \qquad 2^{\log_{\frac{1}{2}}(-x)} > 2$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Scrivere la funzione $f(f(x))$ in ognuno dei seguenti casi:

$$f(x) = 1 - x \qquad f(x) = \frac{x}{x-1} \qquad f(x) = \frac{ax+b}{x-a} \qquad f(x) = x^2 + x + 3$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Trovare $f(x)$ sapendo che $f(x+1) = x^2 - 5x + 3$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Una funzione polinomiale di secondo grado ha la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, dove a, b, c sono costanti e $a \neq 0$.

- Trovare i valori dei coefficienti a, b, c sapendo che:

$$f(0) = 3, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 9$$

- Mostrare che le funzioni polinomiali di secondo grado non possono avere per immagine tutta la retta reale.

$\boxed{\mathbf{6}}$ In ognuno dei seguenti casi decidere se è vero o no che l'equazione determina la variabile y come funzione della variabile x; nei casi affermativi trovare una formula per la funzione.

$$3x^2 + y^2 = 1 \quad 3x^2 + y = 1 \quad \frac{y+1}{y-1} = x \quad x = y - \frac{1}{y}$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ Spezzare l'equazione

$$2x^2 + 2xy + y^2 = 3$$

in due equazioni, ognuna delle quali determini y come funzione di x.

$\boxed{\mathbf{8}}$

- Determinare la superficie della sfera in funzione del suo volume.
- Determinare il volume del cubo in funzione della sua superficie.
- Determinare la superficie di un cilindro retto di volume fissato V in funzione del raggio di base.
- Una corda di lunghezza l è tagliata in due pezzi e questi pezzi sono disposti in forma di circolo e di quadrato. Se x è il lato del quadrato, esprimere l'area totale racchiusa in funzione di x.
- È vero che l'area del triangolo è funzione del perimetro?

9 Disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

$$
\begin{array}{cccc}
y = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2} & y = x + \dfrac{1}{x} & y = \dfrac{x}{1 + x^2} & y = \sqrt{25 - x^2} \\
y = (1 - x)(2 - x)(3 - x) & y = x^4 - x^2 & y = \dfrac{1}{x^2} & y = \dfrac{1}{x^3} \\
y = \dfrac{x}{x^2 - 1} & y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1} & y = \sqrt{(x - 1)(3 - x)} & y = \dfrac{1}{\sqrt{(x - 1)(3 - x)}} \\
y = \sqrt{\dfrac{4 - x}{x - 2}} & y = |x| + 1 & y = |x + 1| & y = 2x - |x| \\
y = |2x + 3| - |x^2 - 1| & y = \sqrt{x^2} & y = (\sqrt{x})^2 & y = \sqrt{|x + 1| - |x - 1|}\,x
\end{array}
$$

10 Convertire gli angoli seguenti da gradi a radianti o viceversa:

$$
\begin{array}{cccccc}
15^\circ & 150^\circ & 1500^\circ & -36^\circ & -110^\circ & 7^\circ \\
\frac{\pi}{15} & \frac{\pi}{45} & -\frac{\pi}{36} & -3 & \pi^2 & 30
\end{array}
$$

11 Determinare i seguenti valori senza usare calcolatrice:

$$
\begin{array}{cccccc}
\cos(-120^\circ) & \sin(780^\circ) & \sin\left(\frac{17}{3}\pi\right) & \cos\left(-\frac{15}{4}\pi\right) & \sin\left(\frac{19}{6}\pi\right) & \cos\left(\frac{99}{4}\pi\right) \\
\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) & \sin\left(\frac{7}{6}\pi\right) & \sin\left(\frac{13}{6}\pi\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) & \cos\left(\frac{13}{6}\pi\right)
\end{array}
$$

12 Esprimere ognuno dei seguenti valori con una corrispondente funzione di un angolo del primo quadrante:

$$
\begin{array}{cccc}
\sin\left(\frac{9}{2}\pi\right) & \sin 7\pi & \sin\left(-\frac{7}{3}\pi\right) & \cos 10\pi \\
\cos\left(\frac{9}{4}\pi\right) & \cos\left(-\frac{6}{5}\pi\right) & \sin\left(-\frac{11}{2}\pi\right) & \cos\left(\frac{11}{3}\pi\right)
\end{array}
$$

13 Dire se il numero dato è positivo, negativo o zero:

$$
\sin 500\pi \qquad \cos 7 \qquad \sin 901^\circ \qquad \cos 2^4
$$

14 Verificare le seguenti identità:

$$
\sin 3\vartheta = 3\sin\vartheta - 4\sin^3\vartheta \qquad \cos 3\vartheta = 4\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta
$$

15 Se $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ trovare:

$$
f(-x) \qquad f\left(\frac{1}{x}\right) \qquad f\left(\frac{1}{1-x}\right) \qquad f(f(x))
$$

16 Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ è un polinomio di grado $n \geq 1$, dimostrare le seguenti affermazioni.

- Se $p(0) = 0$, allora $p(x) = xq(x)$, dove $q(x)$ è un polinomio di grado $n - 1$.
- Se a è un numero reale, la funzione $f(x)$ definita da $f(x) = p(x + a)$ è un polinomio di grado n.
- Se a è un numero reale per cui $p(a) = 0$, cioè se a è uno *zero* di $p(x)$, allora $p(x) = (x - a)q(x)$, dove $q(x)$ è un polinomio di grado $n - 1$.
  (Sugg.: considerare $f(x) = p(x + a$.)

$\boxed{\textbf{17}}$ Per ognuna delle seguenti funzioni, decidere se è pari, dispari o nessuna delle due.

$$\begin{array}{cccc} x^3 & x(x^3+x) & x+\frac{1}{x} & x^2+\frac{1}{x} \\ \frac{x^3+x}{x^2+1} & x^5+1 & x(x+1) & \tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \end{array}$$

$\boxed{\textbf{18}}$ Disegnare i grafici delle seguenti funzioni, specificando quali sono periodiche.

$$\begin{array}{cccc} y=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) & y=\sin(x+2) & y=\cos 3x & y=2\cos x-\sin x \\ y=\tan|x| & y=\sin\sin x & y=\cos\sin x & y=\cos\arcsin x \\ y=\arcsin\sin x & y=\arccos|x| & y=|\arcsin x| & y=\arctan|x-3| \end{array}$$

$\boxed{\textbf{19}}$ Siano r e s numeri reali per cui $(1+r^2)s=(1+s^2)r$.

- Dimostrare che r e s devono essere uguali oppure l'uno il reciproco dell'altro.
- Disegnare il grafico della funzione $\frac{s}{1+s^2}$.

$\boxed{\textbf{20}}$ Comprendere il testo del seguente esercizio.
Siano $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n\in\mathbb{R}$ e tali che:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^j=\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^j \quad \text{per ogni } j\in\mathbb{N}$$

Dimostrare che esiste una permutazione σ di $\{1,2,\ldots,n\}$ tale che $a_\nu=b_{\sigma(\nu)}$ per ogni $\nu\in\{1,2,\ldots,n\}$.