

Esercizi e complementi quattordicesima settimana

1 Determinare una primitiva delle seguenti funzioni.

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{\sin x} & \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} & \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} & \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} & \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \log x \\ \frac{e^x}{(e^x+1)^2} & \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^5} & (x+2)\sqrt{5x-x^2} \end{array}$$

2 Si dica quali dei seguenti integrali generalizzati esistono finiti.

$$\int_0^1 \log \frac{1}{x} dx \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + x^3} dx \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} dx \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \log x}$$

3 Sia $|b| < a$. Dimostrare la relazione:

$$\int_0^\pi \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

4 Si dica come devono essere prese le costanti A e B perché esista finito il seguente integrale generalizzato:

$$\int_1^{+\infty} (\sqrt{x} - A\sqrt{x+1} - B\sqrt{x-1}) dx$$

5 Dimostrare che si ha, per ogni $y > 0$:

$$\frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + y^2} = 1$$

6 Dimostrare che l'integrale generalizzato che fornisce il periodo del pendolo è convergente (v. es. 16 negli esercizi della dodicesima settimana).

7 Leggere in [S] il paragrafo 7.5, con particolare attenzione al differenziale d'arco.

8 Fare i conti sulla cicloide e le altre curve presentate nelle prossime pagine.

9 Leggere il paragrafo 7.3 di [S] svolgendo gli esercizi risolti.

10 Svolgere gli esercizi 1, 2, 11, 17 a pag. 229 e 19 a pag. 542 di [S].

11 Calcolare l'area di un segmento parabolico limitato dalla parabola e da una retta parallela alla tangente nel vertice.

12 Studiare la curva cartesiana di equazione implicita (cissoide di Diocle):

$$(x^2 + y^2)x - 2ry^2 = 0, \quad r > 0$$

disegnandone il grafico. Calcolare l'area della porzione di piano limitata dalla cissoide e dal suo asintoto.

13 Studiare la curva cartesiana di equazione implicita (strofoide):

$$y^2(2r - x) = x(r - x)^2, \quad r > 0$$

disegnandone il grafico. Trovare poi l'area del *cappio* della curva e l'area della regione compresa fra la curva e il suo asintoto.

[S] G.F. Simmons, *Calculus with Analytic Geometry*, McGraw-Hill, New York (1996).

et en portant l'expression de n et y'' dans (32₁), il vient :

$$R = \frac{y^6 a^2}{a^3 y^3 y} = \frac{y^2}{a} = n,$$

c'est-à-dire que *le rayon de courbure d'une chaînette est égal à la longueur de la normale MN*. Pour $x = 0$ l'ordonnée y prend sa plus petite valeur $y = a$ et le point A correspondant est le *sommet*.

Sur la fig. 93 on a représenté en plus quelques lignes auxiliaires dont nous aurons besoin par la suite. Si on remplace x par $(-x)$, l'équation de la chaînette n'est pas modifiée, c'est-à-dire que l'axe OY est un axe de symétrie de la chaînette.

II-5-10. La cycloïde. Soit un cercle de rayon a qui roule sans glisser sur une droite immobile. Le lieu géométrique décrit lors d'un tel mouvement par un point M fixé sur le cercle s'appelle *une cycloïde*.

Prenons pour axe OX la droite sur laquelle roule le cercle; pour origine des coordonnées prenons la position initiale du point M , lorsqu'il est le point

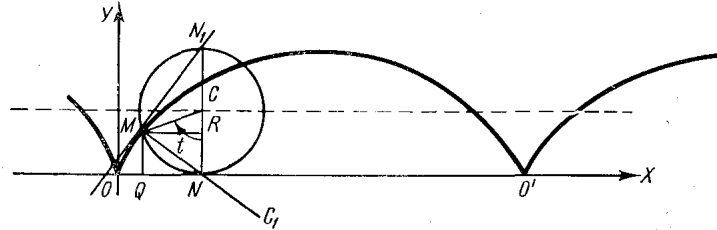


Fig. 94

de tangence du cercle avec l'axe OX et soit t l'angle dont a tourné le cercle. Soit de plus C le centre du cercle, N le point de tangence du cercle avec l'axe OX dans une certaine position, Q le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur l'axe OX et R le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur le diamètre NN_1 du cercle (fig. 94).

Etant donné l'absence de glissement, on a

$$\overline{ON} = \text{arc } NM = at,$$

et on peut exprimer les coordonnées du point M qui décrit la cycloïde au moyen

du paramètre $t = \widehat{NCM}$:

$$x = \overline{OQ} = \overline{ON} - \overline{QN} = at - a \sin t = a(t - \sin t),$$

$$y = \overline{QM} = \overline{NC} - \overline{RC} = a - a \cos t = a(1 - \cos t).$$

Ce qui donne la représentation paramétrique de la cycloïde.

Notons tout d'abord qu'il suffit d'étudier les variations de t dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ qui correspond à une rotation complète du cercle. Après une rotation complète le point M coïncide à nouveau avec le point de contact O' du cercle avec l'axe OX mais avec une translation $\overline{OO'} = 2\pi a$. La partie de courbe obtenue au-delà sera identique à l'arc OO' avec translation de cet arc de $2\pi a$

à droite, etc. Calculons les deux premières dérivées de x et y par rapport à t :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varphi'(t) = a(1 - \cos t), & \frac{dy}{dt} &= \psi'(t) = a \sin t, \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \varphi''(t) = a \sin t, & \frac{d^2y}{dt^2} &= \psi''(t) = a \cos t. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Le coefficient angulaire de la tangente en vertu de la première des formules (33):

$$y' = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \cotg \frac{t}{2}.$$

Cette formule donne un moyen simple de construire la tangente à la cycloïde. Joignons le point N_1 au point M de la courbe. L'angle MN_1N est un angle inscrit correspondant à l'arc $NM = t$ et il est égal à $\frac{t}{2}$. On obtient à partir du triangle rectangle RMN_1 (fig. 94):

$$\widehat{RMN_1} = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}, \quad \text{tg } \widehat{RMN_1} = \text{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right) = \cotg \frac{t}{2}.$$

En comparant cette expression avec celle de y' , on voit que la droite MN_1 est la tangente à la cycloïde, c'est-à-dire que:

Pour construire la tangente à la cycloïde au point M de celle-ci, il suffit de joindre ce point à l'extrémité N_1 du diamètre du cercle roulant dont l'autre extrémité est le point de tangence du cercle avec l'axe OX .

La droite MN joignant le point M à l'autre extrémité du diamètre cité ci-dessus est perpendiculaire à la droite MN_1 car l'angle N_1MN , interceptant un demi-cercle est un angle droit et on peut affirmer que MN est la normale à la cycloïde. La longueur de la normale $n = \overline{MN}$ s'obtient directement à partir du triangle rectangle N_1MN :

$$n = 2a \sin \frac{t}{2}.$$

Le rayon de courbure de la cycloïde s'obtient à l'aide de la formule (34) et des expressions (36):

$$\begin{aligned} R &= \pm \frac{[a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t]^{3/2}}{a \cos t \cdot a(1 - \cos t) - a \sin t \cdot a \sin t} = \pm \frac{a(2 - 2 \cos t)^{3/2}}{\cos t - 1} = \\ &= a \cdot 2^{3/2} (1 - \cos t)^{1/2} = 4a \sin \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Dans cette dernière expression nous n'avons laissé que le signe (+), car pour la première branche de la cycloïde t est dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ et $\sin \frac{t}{2}$ ne peut pas être négatif.

En comparant cette expression avec celle de la normale n , nous avons $R = 2n$, c'est-à-dire que le rayon de courbure de la cycloïde est égal au double de la normale ($\overline{MC_1}$ sur la fig. 94).

Si le point M qui décrivait la cycloïde n'était pas sur le cercle mais à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle, alors au cours de la rotation il décrirait une *cycloïde raccourcie* ou *allongée* (parfois on donne à ces deux courbes le nom de *trochoïde*).

Soit h la distance CM du point M au centre du cercle roulant, les autres notations restant inchangées. Examinons d'abord le cas où $h < a$, c'est-à-dire

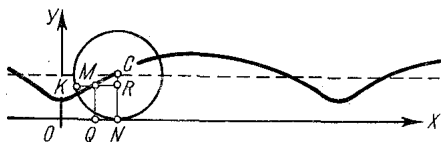


Fig. 95

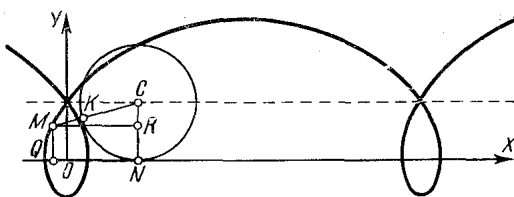


Fig. 96

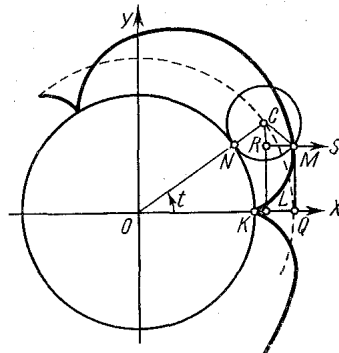


Fig. 97

le cas où le point M est à l'intérieur du cercle (fig. 95). On voit sur la figure que

$$\begin{aligned}x &= \overline{OQ} = \overline{ON} - \overline{QN} = at - h \sin t, \\y &= \overline{QM} = \overline{NC} - \overline{RC} = a - h \cos t.\end{aligned}$$

Dans le cas où $h > a$ les équations seront les mêmes mais la courbe aura a forme indiquée sur la fig. 96.

II-5-11. Epicycloïdes et hypocycloïdes. Si le cercle sur la circonférence duquel est fixé le point M roule non sur la droite OX , mais sur un cercle immobile, on obtient deux classes de courbes importantes : les *épicycloïdes* si le cercle roulant est *extérieur* et les *hypocycloïdes* s'il est *intérieur* à l'immobile.

Donnons l'équation de l'*épicycloïde*. Plaçons l'origine des coordonnées O au centre du cercle immobile. L'axe OX sera dirigé suivant la droite joignant O au point K qui est la position initiale du point M , lorsque les deux cercles sont tangents en ce point. Soit a le rayon du cercle mobile et b celui du cercle immobile, et prenons pour paramètre t l'angle formé par l'axe OX avec le rayon ON du cercle fixe mené au point de tangence des cercles, lorsque le cercle mobile

a tourné de l'angle $\varphi = \widehat{NCM}$ (fig. 97).

Etant donné que le roulement du cercle se produit sans glissement, on peut écrire

$$\text{arc } KN = \text{arc } NM,$$

c'est-à-dire :

$$bt = a\varphi, \quad \varphi = \frac{bt}{a}.$$

On voit sur la figure que

$$\left. \begin{aligned} x &= \overline{OQ} = \overline{OL} + \overline{LQ} = \overline{OC} \cos \widehat{KOC} - \overline{CM} \cos \widehat{SMC} = \\ &= (a+b) \cos t - a \cos (t+\varphi) = (a+b) \cos t - a \cos \frac{a+b}{a} t, \\ y &= \overline{QM} = \overline{LC} - \overline{RC} = \overline{OC} \sin \widehat{KOC} - \overline{CM} \sin \widehat{SMC} = \\ &= (a+b) \sin t - a \sin (t+\varphi) = (a+b) \sin t - a \sin \frac{a+b}{a} t. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

La courbe est formée d'une série d'arcs identiques qui correspondent à une rotation complète du cercle mobile, c'est-à-dire à une augmentation de l'angle φ de 2π et de l'angle t de $\frac{2a\pi}{b}$. Donc, les extrémités de ces arcs correspondent aux valeurs :

$$t = 0, \quad \frac{2a\pi}{b}, \quad \frac{4a\pi}{b}, \quad \dots, \quad \frac{2pa\pi}{b}, \quad \dots$$

Pour que nous puissions revenir au point initial de la courbe K , il faut et il suffit qu'une extrémité d'un des arcs coïncide avec K , c'est-à-dire qu'il existe des nombres entiers p et q qui vérifient la condition :

$$\frac{2pa\pi}{b} = 2q\pi,$$

c'est-à-dire qu'au point K correspond un certain nombre de rotations complètes autour du point O . La condition précédente peut encore s'écrire :

$$\frac{a}{b} = \frac{q}{p}.$$

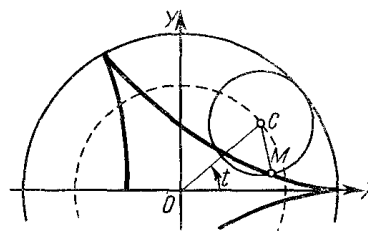


Fig. 98

De tels nombres p et q existeront si, et seulement si, a et b sont des segments commensurables, sinon le rapport $\frac{a}{b}$ est un nombre irrationnel qui ne peut pas être égal au rapport de deux entiers.

Il en résulte que l'épicycloïde est une courbe fermée si, et seulement si, les rayons des cercles mobile et fixe sont des multiples d'une même longueur, sinon la courbe n'est pas fermée et, partant du point K , elle ne peut jamais y revenir.

Cette remarque s'applique également à l'hypocycloïde (fig. 98) dont l'équation peut être obtenue à partir de celle de l'épicycloïde en remplaçant a par $(-a)$:

$$\left. \begin{aligned} x &= (b-a) \cos t + a \cos \frac{b-a}{a} t, \\ y &= (b-a) \sin t - a \sin \frac{b-a}{a} t. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Indiquons quelques cas particuliers. Supposons que dans le cas de l'épicycloïde $b = a$, c'est-à-dire que les rayons des cercles mobile et fixe sont égaux.

et en remarquant qu'aux points A et B correspondent les valeurs du paramètre 0 et $\frac{\pi}{2}$, nous obtenons pour la longueur l cherchée l'expression suivante résultant de la formule (15):

$$l = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt. \quad (22)$$

La fonction primaire ne pouvant pas être exprimée à l'aide de fonctions élémentaires, pour l'intégrale définie inscrite on ne peut donner qu'un moyen du calcul approximatif, qui sera produit plus bas.

3. La longueur de l'arc de la spirale logarithmique

$$r = Ce^{a\theta}$$

[II-5-14], comprise entre les rayons vecteurs $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, en vertu de (20) s'exprime par l'intégrale:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = C \sqrt{1+a^2} \int_{\alpha}^{\beta} e^{a\theta} d\theta = \frac{C \sqrt{1+a^2}}{a} (e^{a\beta} - e^{a\alpha}).$$

4. Dans [II-5-9] nous avons considéré la chaînette; soit $M(x, y)$ un point quelconque de cette courbe. Calculons la longueur de l'arc AM (fig. 93). Se rappelant l'expression de $(1 + y'^2)$, nous obtenons, à partir de [II-5-8]:

$$AM = \int_0^x \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^x \frac{y}{a} dx = \frac{1}{2} \int_0^x (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) dx = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}) = ay',$$

d'où

$$a^2 + (\text{arc } AM)^2 = a^2 + a^2 y'^2 = a^2 (1 + y'^2) = y^2,$$

c'est-à-dire que la longueur de l'arc AM est égale au côté du triangle rectangle, dont l'hypoténuse est égale à l'ordonnée du point M , et dont l'autre côté est égal à a . Nous obtenons, de cette façon, la règle suivante pour établir la longueur de l'arc AM :

Du sommet A d'une chaînette, comme centre, il faut décrire une circonférence avec un rayon, égal à l'ordonnée du point M ; le segment OQ sur l'axe OX de l'origine des coordonnées O au point d'intersection Q de l'axe OX avec la circonférence mentionnée sera la rectification de l'arc AM (fig. 93).

Dans les formules précédentes, pour le choix des signes, nous nous sommes laissé guider par le fait que pour les points, se trouvant dans la partie droite de la chaînette, y' possédait le signe $(+)$.

5. Pour la cycloïde, considérée en [II-5-10], nous définissons la longueur de l'arc l de la branche OO' (fig. 94) et l'aire S , limitée par cette branche et l'axe OX :

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 2a \left[-2 \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8a, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la longueur de l'arc d'une branche de cycloïde est égale à quatre fois le diamètre de la roulante;

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi a} y \, dx = \int_0^{2\pi} \psi(t) \varphi'(t) \, dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \, dt = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) \, dt = 2\pi a^2 - 2a^2 [\sin t]_0^{2\pi} + \\ &+ a^2 \left[\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{2\pi} = 2\pi a^2 + \pi a^2 = 3\pi a^2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que l'aire, limitée à un arc de cycloïde et sa base rectiligne, sur laquelle se déplace la roulante, est égale à trois fois l'aire de la roulante.

Lors du calcul de l , pour l'extraction de la racine $\sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}}$, nous devons prendre la valeur arithmétique de la racine, ce que nous avons fait parce que dans la variation de t de 0 à 2π la fonction $\sin \frac{t}{2}$ est positive.

6. La cardioïde, considérée dans [II-5-15], est symétrique par rapport à l'axe polaire (fig. 141), c'est pourquoi pour le calcul de sa longueur l il suffit de calculer la longueur de l'arc pour les variations de θ dans l'intervalle $(0, \pi)$, et de doubler le résultat obtenu :

$$\begin{aligned} l &= 2 \int_0^\pi \sqrt{r^2 + r'^2} \, d\theta = 2 \int_0^\pi \sqrt{4a^2 (1 + \cos \theta)^2 + 4a^2 \sin^2 \theta} \, d\theta = \\ &= 8a \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} \, d\theta = 8a \left[2 \sin \frac{\theta}{2} \right]_0^\pi = 16a, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la longueur de l'arc de cardioïde est huit fois plus grande que le diamètre de la roulante (ou de la base).

III-3-4. Calcul des volumes des corps à partir de leur section transversale. Le calcul du volume d'un corps donné se ramène aussi au calcul d'une intégrale définie si nous avons la possibilité de

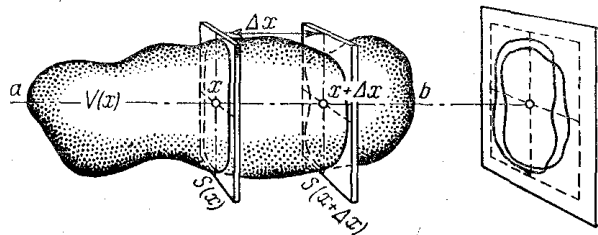


Fig. 136

définir l'aire des sections transversales du corps, perpendiculaires à une direction donnée.

Nous désignerons par V le volume d'un corps donné (fig. 136) et supposerons que les aires de toutes les sections transversales du corps par les plans perpendiculaires à une direction donnée, que