

**Analisi Matematica II per Fisica e Astronomia**

**17/9/2010**

**1** Si considerino un circolo  $\Gamma$ , un suo punto  $O$ , e la tangente  $d$  a  $\Gamma$  nel punto  $D$  diametralmente opposto ad  $O$ . Una retta generica  $s$  per  $O$  sega  $\Gamma$  in un punto  $M$  e la  $d$  in un punto  $N$ . Si fissi sulla  $s$  il punto  $P$  tale che  $\overline{OP} = \overline{MN}$ . Allora, se la retta  $s$  ruota intorno ad  $O$ , il punto  $P$  descrive una curva  $\mathcal{C}$  detta *cissoide*.

- a) Fare un disegno della figura proposta e abbozzare il grafico della cissoide.
- b) Scelti  $O$  come polo e la semiretta  $OD$  come asse polare, e posto  $\overline{OD} = a$ , ottenere l'equazione della cissoide in coordinate polari. Dedurre l'equazione in coordinate cartesiane.
- c) Ponendo  $y = tx$ , ottenere un'equazione parametrica razionale della cissoide in funzione della pendenza  $t$  della retta  $s$ .
- d) Dimostrare che la retta  $x = a$  è un asintoto della cissoide. Dimostrare che nel ramo di cissoide con  $y \geq 0$  la variabile  $y$  è funzione crescente della variabile  $x$ .
- d) Trovare l'area della regione piana compresa fra la cissoide e il suo asintoto.

**2** Si dica se la funzione

$$f(x) = \frac{\log(1 + x^2)}{1 + x^2}$$

è sommabile su tutta la retta reale, motivando la risposta.

**3** Tra le curve integrali dell'equazione differenziale

$$x dy = (2x^2 + 1) dx$$

trovare quella passante per il punto  $(1, 1)$ .

**4** Sia  $S$  la superficie di equazione

$$x^2 + y^2 - 4(2 - z)x + 3(2 - z)^2 = 0$$

- Dimostrare che  $S$  ha un unico punto singolare  $P$ , trovando le coordinate di tale punto.
- Dire che tipo di curve si ottengono intersecando  $S$  con piani paralleli al piano  $z = 0$  e non passanti per  $P$ .
- Sia  $\Gamma$  una delle curve del punto precedente, per esempio l'intersezione di  $S$  con il piano  $z = 0$ . Dimostrare che  $S$  è il cono formato dalle rette passanti per  $P$  e che si appoggiano alla curva  $\Gamma$ .  
Disegnare  $S$ .
- Trovare i punti di  $S \setminus \{P\}$  che sono stazionari per la funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - 1)^2$$

- Trovare equazioni parametriche di  $S$ .