

**Analisi 2 per Matematica – Prima parte**

**2/2/2012** **A**

**Attenzione:** svolgere esercizi distinti su facciate distinte, consegnando una sola versione per ogni esercizio. Consegnare questo foglio. Su ogni foglio protocollo consegnato devono essere scritti *cognome, nome, svolgimento esercizio numero...*

Chi desidera ritirarsi deve consegnare questo foglio con sopra scritto *RITIRATO*.

**1** Sia  $\Gamma$  il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  definito dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ y - x = 0 \end{cases}$$

Il sottoinsieme  $\Gamma$  è intersezione di due superficie. Riconoscerle e disegnarle. Dimostrare che  $\Gamma$  è varietà differenziale 1-dimensionale, connessa ma non compatta.

Determinare lo spazio vettoriale tangente a  $\Gamma$  nel punto  $(1, 1, 2)$ .

Sia  $p_b = (0, 0, b)$ , ove  $b > 0$ . Al variare di  $b$  determinare la distanza minima di  $p_b$  da  $\Gamma$ .

Dopo aver trovato una parametrizzazione di  $\Gamma$ , scriverne il differenziale d'arco  $ds$ .

**2** Data l'equazione differenziale

$$y' = 1 - y^3$$

si dica perché sono soddisfatte le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale. Indicando con  $t$  la variabile indipendente, si dimostri che la famiglia delle soluzioni è invariante per traslazioni lungo l'asse  $t$ .

Dopo aver trovato le soluzioni costanti, indicare nel piano  $(t, y)$  le regioni di crescita/decrecenza delle soluzioni.

Sia ora  $y(t)$  la soluzione massimale del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 1 - y^3 \\ y(t_0) = y_0 \quad \text{ove } y_0 > 1 \end{cases}$$

- Dimostrare che  $y(t) > 1$  per ogni  $t \in J$ , ove  $J$  è l'intervallo massimale di definizione.
- Studiare la funzione  $y(t)$ : intervallo massimale di definizione (giustificare), monotonia, convessità, limiti agli estremi (giustificare).
- Dire se l'area compresa fra il grafico della soluzione e i suoi asintoti è finita o meno. Determinare anche il valore.

**3** Sia  $f(t)$  la funzione così definita:

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{per } 0 \leq t \leq 2\pi \\ 0 & \text{per } t < 0 \text{ o } 2\pi < t \end{cases}$$

Dire perché  $f$  è Riemann-integrabile.

Si consideri la successione di funzioni  $(f_n)_{n \geq 1}$  ove  $f_n(t) = f(nt)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Dopo aver disegnato il grafico di alcune  $f_n$ , trovare il limite puntuale della successione di funzioni.

Descrivere gli intervalli in cui la successione  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge uniformemente.

Dimostrare che:

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} |f_n(t)| dt = \int_{\mathbb{R}} \lim_n |f_n(t)| dt$$