

## Analisi Matematica 2 per Matematica Esempi di compiti, primo semestre 2011/2012

### Ricordare:

- una funzione lipschitziana tra spazi metrici manda insiemi limitati in insiemi limitati;
- se il dominio di una funzione lipschitziana  $\varphi$  è un sottoinsieme di uno spazio metrico e il codominio è uno spazio metrico completo, allora  $\varphi$  si può estendere per continuità nei punti di frontiera del dominio che non appartengono al dominio (basta applicare il criterio di Cauchy per l'esistenza del limite);
- se il dominio di una funzione derivabile è un intervallo della retta reale e la derivata è limitata, allora la funzione è lipschitziana; in tal caso, se il dominio è limitato, la funzione è limitata ed estendibile per continuità agli estremi. Tale fatto va tenuto presente nella discussione sul comportamento delle soluzioni massimali del problema di Cauchy.

### Primo compito.

**Esercizio 1.** Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{1}{\log y}$$

ove  $f(t, y) = \frac{1}{\log y}$  si considera definita sull'aperto  $\Omega = \{(t, y) : y > 1\}$ .

- Dimostrare che ogni soluzione è strettamente crescente.
- Dimostrare che l'intervallo di definizione di ogni soluzione massimale è superiormente illimitato.
- Risolvere l'equazione trovando un'equazione implicita per le soluzioni. Dimostrare che per tale equazione sono soddisfatte le ipotesi di esplicitabilità locale per la variabile  $y$ .
- Dimostrare che il dominio di una soluzione massimale deve essere inferiormente limitato.

**Esercizio 2.** Sia  $\Gamma$  una curva piana di equazione implicita  $g(x, y) = 0$  dove  $g$  è una funzione di classe  $C^1$ , sommersiva nei punti di  $\Gamma$ .

È vero che  $\Gamma$  è varietà differenziale 1-dimensionale?

Identificando  $\mathbb{R}^2$  con il piano coordinato  $(x, y, 0)$ , consideriamo la curva  $\Gamma$  immersa in  $\mathbb{R}^3$ , e pertanto definita dal sistema:

$$\begin{cases} z = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Sia  $p = (0, 0, 1)$ . Trovare l'equazione del cono  $E$  costituito da tutte le rette passanti per  $p$  e che si appoggiano a punti di  $\Gamma$ . Dimostrare che  $E \setminus \{p\}$  è varietà differenziale 2-dimensionale. Determinare l'equazione del piano affine tangente ad  $E \setminus \{p\}$  in un punto generico  $(x_0, y_0, z_0)$ . Dimostrare che tale piano si appoggia a una retta del cono. Trovare l'equazione del cono nel caso in cui  $\Gamma$  sia il circolo del piano  $(x, y, 0)$  di centro  $(0, 1, 0)$  e raggio 1.

**Esercizio 3.** Si consideri la successione di funzioni  $f_n : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , ove:

$$f_n(x) = \frac{\cos nx}{1 + nx}$$

- Trovare il limite puntuale e dire se la successione converge uniformemente.
- Determinare gli intervalli su cui la successione converge uniformemente.
- Sia  $b > 0$ . Dimostrare che:

$$\lim_n \int_0^b f_n(x) dx = 0$$

- Dimostrare che su  $]0, +\infty[$  non sussiste il passaggio al limite sotto il segno di derivata.

### Secondo compito.

**Esercizio 1.** Si considerino in  $\mathbb{R}^3$  le due superficie  $S_1$  ed  $S_2$  definite dalle equazioni:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 4, \quad y^2 - 2y + z^2 = 0$$

- descrivere le due superficie e osservare che si tratta di varietà differenziali.
- Dimostrare che l'insieme  $\Gamma = S_1 \cap S_2$  è varietà differenziale 1-dimensionale, compatta ma non connessa.
- Dimostrare che  $\Gamma$  è costituita da due curve compatte connesse, parametrizzando tali curve.
- Trovare equazioni della retta affine tangente a  $\Gamma$  in uno dei punti in cui  $y_0 = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$  e  $z_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ .
- Trovare i punti di  $\Gamma$  che sono stazionari per la distanza dall'origine.

### Esercizio 2.

- Determinare l'integrale generale della seguente equazioni differenziale:

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

- Determinare l'equazione differenziale a cui soddisfa la seguente famiglia di curve a un parametro:

i cerchi con centro sulla retta  $y = x$  e tangenti a entrambi gli assi.

**Esercizio 3.** Si dica perché la funzione  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$  è di classe  $C^\infty$  su tutta la retta reale. È vero che  $f(x)$  è somma di una serie di potenze? Quale? Determinare una serie numerica con somma il seguente integrale (giustificare):

$$\int_0^1 f(x) dx$$

**Terzo compito.**

**Esercizio 1.** Determinare il seguente limite giustificando la risposta:

$$\lim_n \int_0^1 \frac{1 + nx^2}{(1 + x^2)^n} dx$$

**Esercizio 2.** Trovare il massimo e il minimo assoluti della funzione  $2x^2 + y + y^2$  sul disco  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

**Esercizio 3.** Siano  $r = r(\vartheta)$  l'equazione di una curva piana in coordinate polari e  $P(r, \vartheta)$  un punto della curva. Indicando con  $\mu$  l'angolo fra il raggio vettore  $\overrightarrow{OP}$  e il versore tangente  $\vec{T}$  (nel verso di percorrenza), dimostrare che:

$$\tan \mu = \frac{r d\vartheta}{dr}$$

Si consideri ora la curva di equazione polare:

$$r = be^{\frac{\vartheta}{k}}$$

ove  $b$  e  $k$  sono parametri reali positivi.

Di che tipo di curva si tratta? Disegnare un grafico spiegandone l'andamento.

Dimostrare che per questa curva l'angolo  $\mu$  è costante.

Fissato  $P_0(r_0, \vartheta_0)$  sulla curva,  $P_0$  la divide in due componenti, una limitata e una illimitata. Trovare la lunghezza  $l$  della componente limitata.

Dimostrare che questa lunghezza si può determinare geometricamente nel modo seguente (Torricelli): se  $Q$  è il punto di incontro della retta tangente alla curva in  $P_0$  con la retta normale per il polo  $O$  al raggio vettore  $\overrightarrow{OP_0}$ , la lunghezza  $l$  coincide con la lunghezza del segmento  $P_0Q$ .

**Quarto compito.**

**Esercizio 1.** Mostrare che il metodo della variazione dei parametri applicato all'equazione  $y'' + y = f(t)$  conduce alla soluzione particolare:

$$y_p(t) = \int_0^t f(\vartheta) \sin(t - \vartheta) d\vartheta$$

Trovare una formula simile per l'equazione  $y'' + k^2y = f(t)$ .

**Esercizio 2.** Per  $a > 0$  si consideri:

$$V_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4; (x - a)^2 + y^2 = a^2\}$$

- $V_a$  è dato come intersezione di due superficie; riconoscerle e fare alcuni disegni. Dimostrare che  $V_a$  è un insieme compatto.
- Per ogni  $a > 0$ , eccettuato al più un valore  $a_0$ ,  $V_a$  è varietà 1-dimensionale. Dimostrarlo e trovare  $a_0$ . Per  $a \neq a_0$  trovare la massima e la minima distanza dei punti di  $V_a$  dal punto  $(0, 1, 0)$ .

**Esercizio 3.** Studiare la successione di funzioni:

$$f_n(x) = \sin(\pi x^n), \quad x \in [0, 1]$$

e l'associata serie  $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ .

- Tracciare rapidamente il grafico di  $f_n$  e dire a quale funzione la successione  $f_n$  converge puntualmente. Dire in quali intervalli si ha convergenza uniforme.
- Cosa si può dire per la convergenza semplice e uniforme della serie negli stessi intervalli?
- Dimostrare che la somma della serie è di classe  $C^1$  in  $[0, 1[$ .

**Quinto compito.**

**Esercizio 1.** Si consideri l'equazione differenziale  $y' = ty^2 \sin y$ .

- Trovare le soluzioni costanti; disegnare le zone del piano  $(t, y)$  in cui le soluzioni sono crescenti e quelle in cui sono decrescenti.
- Mostrare che l'equazione non verifica l'ipotesi del teorema di esistenza e unicità globale, né in forma debole né in forma forte.
- Mostrare che le soluzioni massimali sono definite su tutto  $\mathbb{R}$ .
- Mostrare che ogni soluzione  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è funzione pari, mostrando che anche  $\psi(t) = \varphi(-t)$  è soluzione.
- Mostrare che ogni soluzione non costante  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ha  $t = 0$  come punto di massimo o di minimo assoluto, a seconda del varlore  $\varphi(0)$ .
- Data una soluzione  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $0 < \varphi(0) < \pi$ , dimostrare che i limiti di  $\varphi(t)$  a  $-\infty$  e a  $+\infty$  esistono finiti e calcolarli.

**Esercizio 2.** Si consideri l'insieme  $S$  definito dalle condizioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ y^2 + z^2 = b^2 \end{cases} \quad 0 < b < a$$

- $S$  è intersezione di due superficie, quali? Dimostrare che  $S$  non ha punti nel piano  $x = 0$ .
- Indicare con  $\Gamma$  la componente di  $S$  che sta nel semispazio  $x > 0$ . Fornire una descrizione e un disegno di  $\Gamma$ .
- Descrivere analiticamente (cioè con sistemi di equazioni e/o disequazioni) le proiezioni di  $\Gamma$  sui tre piani coordinati.
- Trovare i punti di  $\Gamma$  che hanno prima componente minima e massima.
- Trovare un vettore tangente a  $\Gamma$  nel punto  $P = \left(\frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}, \frac{b}{2}, \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)$ .

**Esercizio 3.**

**Esercizio 3.** Si consideri la curva piana (*folium* di Cartesio) di equazione implicita:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0, \quad a > 0.$$

- Trovare i punti singolari della curva. Osservare che la curva è simmetrica rispetto alla prima bisettrice.
- Dimostrare che esiste un unico punto  $E$  della curva in cui la normale è parallela alla prima bisettrice, determinandone le coordinate.  
Dimostrare che in un intorno rettangolare del punto  $E$  l'arco di curva ammette una rappresentazione cartesiana  $y = y(x)$ .  
Per tale rappresentazione ottenere un'espressione della derivata prima  $\frac{dy}{dx}$  in funzione delle variabili  $(x, y)$  dei punti della curva.
- Intersecando la curva con le rette del fascio  $y = tx$ , trovare equazioni parametriche della curva  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$ .  
Trovare il dominio  $J$  del parametro  $t$  e i limiti di  $(x(t), y(t))$  agli estremi degli intervalli di tale dominio.  
Studiando il limite di  $x(t) + y(t)$  per  $t \rightarrow -1$ , trovare l'asintoto del folium.
- Determinare  $\frac{dx}{dt}$  e  $\frac{dy}{dt}$  e studiare le variazioni delle funzioni  $x(t)$  e  $y(t)$ .
- Dedurre dai punti precedenti il relativo andamento del grafico del folium e abbozzarne un disegno.