

3

- Calcolare:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} dx$$

- Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia:

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^{2+n}} dx$$

Trovare una formula induttiva per I_n .

- Dedurre dai punti precedenti il valore di I_n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Risoluzione.

- Osserviamo che $de^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}dx$. Perciò:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} de^{-\frac{1}{x}} = \left| e^{-\frac{1}{x}} \right|_{x \rightarrow 0^+}^{x \rightarrow +\infty} = 1 - 0 = 1$$

- Abbiamo appena calcolato I_0 . Per parti si ha:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^{2+n}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n} de^{-\frac{1}{x}} = \\ &= \left| \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x}} \right|_{x \rightarrow 0^+}^{x \rightarrow +\infty} - \int_0^{+\infty} -n \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^{n+1}} dx = \\ &= \dots + n \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^{2+n-1}} dx = \\ &= \dots + nI_{n-1} \end{aligned}$$

Poiché

$$\left| \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x}} \right|_{x \rightarrow 0^+}^{x \rightarrow +\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^n} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^n} = \frac{1}{+\infty} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^n}{e^t} = 0 - 0$$

si ottiene:

$$I_n = nI_{n-1}$$

-

$$I_n = nI_{n-1} = n(n-1)I_{n-2} = n(n-1)(n-2) \cdots 2I_1 = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 \cdot I_0 = n!$$

4

- Scrivere la serie di Taylor con punto iniziale 0 della funzione $\arctan x$.
- Determinare l'insieme J costituito dai punti in cui tale serie di Taylor è convergente, specificando in quali punti c'è convergenza assoluta e in quali punti c'è convergenza condizionata.

- Dimostrare che $\arctan x$ coincide con la somma della propria serie di Taylor per ogni $x \in J$.
(Sugg.: si può partire dall'identità $\frac{1}{1-w} = 1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1} + \frac{w^n}{1-w}$ vera per $w \neq 1$.)

Risoluzione.

- Svolto a lezione.
- Svolto a lezione.
- Svolto sul Simmons: esempio 4, pp. 498-499.

5 Siano a, b numeri reali maggiori di 0. L'ellisse di semiassi a e b ha equazione:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

Dimostrare che il valore minimo della lunghezza dei segmenti tangenti all'ellisse e con gli estremi sugli assi cartesiani è uguale alla somma dei semiassi.

Risoluzione. Si può sempre scegliere un arco dell'ellisse $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ per cui una delle due variabili è funzione dell'altra. Differenziando formalmente si ottiene:

$$\frac{2X}{a^2} dX + \frac{2Y}{b^2} dY = 0 \quad (1)$$

Per ragioni di simmetria, il punto di tangenza (x, y) può essere scelto nel primo quadrante (fare un disegno). Valutando (1) nel punto (x, y) si ha:

$$\frac{x}{a^2} dx + \frac{y}{b^2} dy = 0 \quad (2)$$

Interpretando $dx = X - x$ e $dy = Y - y$ come gli incrementi lungo la retta tangente, si ottiene l'equazione della tangente all'ellisse nel punto (x, y) :

$$\frac{x}{a^2}(X - x) + \frac{y}{b^2}(Y - y) = 0 \quad \text{da cui} \quad \frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} = 1$$

Dette A e B le intersezioni della tangente con gli assi cartesiani, si ha $X_A = \frac{a^2}{x}$ e $Y_B = \frac{b^2}{y}$. Se l è la lunghezza del segmento AB otteniamo:

$$l^2 = \frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2} \quad (3)$$

Da (2) si ottiene

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y} \quad (4)$$

Poiché (3) è definita per $x, y > 0$ e tende a $+\infty$ quando una delle due variabili tende a 0^+ , essa ammette minimo assoluto e tale minimo è da ricercare fra i punti che annullano il differenziale di l^2 :

$$-2\frac{a^4}{x^3} dx - 2\frac{b^4}{y^3} dy = 0 \quad (5)$$

da cui:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a^4}{b^4} \frac{y^3}{x^3} \quad (6)$$

Uguagliando (4) e (6) si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{a^4 y^3}{b^4 x^3} &= \frac{b^2 x}{a^2 y} \\ \frac{y^4}{x^4} &= \frac{b^6}{a^6} \\ \frac{1}{a^2} \left(\frac{x^2}{a^2} \right)^2 &= \frac{1}{b^2} \left(\frac{y^2}{b^2} \right)^2 \\ \frac{1}{a} \frac{x^2}{a^2} &= \frac{1}{b} \frac{y^2}{b^2}\end{aligned}$$

Ricordando che $\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$, si ha:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} \left(\frac{x^2}{a^2} \right) &= \frac{1}{b} - \frac{1}{b} \left(\frac{x^2}{a^2} \right) \\ \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \left(\frac{x^2}{a^2} \right) &= \frac{1}{b} \\ \frac{x^2}{a^2} &= \frac{a}{a+b} \\ \frac{y^2}{b^2} &= \frac{b}{a+b}\end{aligned}$$

Sostituendo i valori delle ultime due espressioni in (3) risulta:

$$l^2 = a^2 \left(\frac{a+b}{a} \right) + b^2 \left(\frac{a+b}{b} \right) = (a+b)^2$$

Perciò $l = a+b$ è effettivamente il minimo assoluto perché esiste un unico punto nel primo quadrante che annulla il differenziale di l^2 ; le coordinate di questo punto sono $x = a\sqrt{\frac{a}{a+b}}$ e $y = b\sqrt{\frac{a}{a+b}}$.