Programma di ANALISI MATEMATICA 1
per il corso di studi in ASTRONOMIA, Anno accademico 2003–2004

Docenti: Umberto Marconi e Corrado Marastoni

## 1. Prerequisiti

*Per questa sezione si veda ad esempio il testo [1].*
Proprietà delle potenze, esponenziali e logaritmi. Geometria analitica piana. Trigonometria. Funzioni, grafici, nomenclatura. Funzioni polinomiali, funzioni razionali fratte, funzione potenza, funzione esponenziale, funzione logaritmo, funzioni trigonometriche e loro inverse. Disequazioni.

## 2. La retta reale

*Da qui in poi si fa riferimento ai testi [2] e [4].*
Rapporto tra segmenti e numeri reali. Ordinamento della retta reale. Lacune nella retta razionale. Completezza dei numeri reali. Estremo superiore ed estremo inferiore. Formulazioni equivalenti della completezza. Archimedeità della retta reale.
Funzioni e successioni: concetti fondamentali e nomenclatura.
Topologia della retta reale. Aperti e chiusi: definizione e proprietà. Un sottoinsieme chiuso e limitato ammette massimo e minimo. Intorni di un punto. Proprietà degli intorni. Un insieme è aperto se e solo se è intorno di ogni suo punto. La topologia della retta estesa.

## 3. Limiti di successioni

Definizione di limite per successioni di numeri reali; formulazioni equivalenti. Unicità del limite. Sottosuccessioni e loro comportamento rispetto al limite. Permanenza del segno, confronto e carabinieri. Infinitesimi. Teoremi standard sui limiti. Successioni monotone e limiti di successioni monotone. Una successione monotona e limitata è convergente. Ogni successione limitata di numeri reali ammette una sottosuccessione convergente [4]. Un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è sequenzialmente compatto se e solo se è chiuso e limitato [4].
Principio di induzione. Disuguaglianza di Bernoulli. Media aritmetica e media geometrica; loro confronto. La successione esponenziale. Funzione esponenziale e funzione logaritmo. Disuguaglianze fondamentali.

## 4. Limiti di funzioni

Punti di accumulazione. Definizione di limite per una funzione reale di variabile reale e sue formulazioni equivalenti. Unicità, permanenza del segno, confronto, carabinieri, teoremi standard sui limiti. Alcuni limiti fondamentali. Cambiamento di variabile. Relazione ≪*o piccolo*≫ e principio di sostituzione degli infinitesimi. Funzioni dello stesso ordine. Scala di confronto delle potenze e sviluppi asintotici delle funzioni elementari. Relazione ≪$\mathcal{O}$ *grande*≫.

## 5. Funzioni continue

Definizione di funzione continua in un punto, formulazioni equivalenti, permanenza del segno. Funzioni continue su tutto il dominio. Teorema di Weierstrass e teorema dei valori intermedi [4]. Estremi ed estremanti locali e assoluti. Versione topologica del teorema di Rolle.

## 6. Derivate

Definizione di derivata in un punto e formulazioni equivalenti. Derivabile implica continua. Funzioni globalmente derivabili e funzione derivata prima. Derivate successive e funzioni di classe $\mathcal{C}^n$. Proprietà dell'operatore di derivazione (rispetto alla somma, al prodotto, ... ). Derivate delle funzioni elementari. Derivata della funzione composta e della funzione inversa. Estremanti locali e annullamento della derivata prima. Teorema di Rolle. Teorema di Lagrange e sue conseguenze. Punti di estremo locale e derivata seconda. Teorema degli incrementi finiti. Regola di de l'Hôpital (dimostrazione nel caso $\frac{0}{0}$ per $x \to c \in \mathbb{R}$). Formula di Taylor con il resto di Peano e con il resto di Lagrange. Asintoti obliqui. Funzioni convesse e concave (senza dim.).

## 7. Serie numeriche

Serie numeriche a termini reali. Convergenza. Serie resto. Serie geometrica e serie armonica. Serie a termini positivi. Confronto. Criterio di condensazione (senza dim.). Serie armonica generalizzata. Criteri della radice e del rapporto. Serie a termini di segno alterno e criterio di Leibniz. Serie assolutamente convergenti. Una serie assolutamente convergente è convergente. Utilità della relazione di asintoticità e della relazione $\mathcal{O}$ grande per stabilire la convergenza assoluta di una serie.
Serie di Taylor di una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$. Utilità del resto di Lagrange per studiare la convergenza e la somma di una serie di Taylor. Serie di Taylor delle funzioni elementari.

## 8. Integrali

Funzioni a scalino a supporto compatto e loro integrale. Proprietà di tale integrale. Funzioni Riemann-integrabili: definizione e caratterizzazione. Proprietà dell'integrale di Riemann. Funzioni localmente Riemann-integrabili. Le funzioni bilanciate sono localmente Riemann-integrabili (senza dim.).
Integrale esteso a un intervallo orientato e sue proprietà. Funzione integrale. La funzione integrale è continua ed è derivabile se la funzione integranda è continua. Teorema fondamentale del calcolo. Integrazione per parti e per sostituzione. Tecniche di integrazione. Calcolo di aree.

## 9. Numeri complessi

Definizione di corpo complesso. Parte reale, parte immaginaria, piano di Argand-Gauss. Coniugato e modulo di un numero complesso. Proprietà del coniugato e del modulo. Distanza di due numeri complessi.
Forma polare. Notazione esponenziale. Potenze e radici. Radici quadrate di un numero complesso. Numeri complessi e geometria piana. Se definiamo $e^z$ come somma della serie esponenziale, detti $x = \Re z$ e $y = \Im z$, si ha $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ (senza dim.).

## 10. Integrali generalizzati

Definizione, proprietà ed esempi. Criteri di convergenza: criterio del confronto, convergenza assoluta, criterio di asintoticità. Criterio dell'integrale per la convergenza di una serie. Criterio di Abel-Dirichlet.

## 11. Equazioni differenziali

Equazioni a variabili separabili. Equazioni lineari del primo ordine. Equazioni lineari del secondo ordine: struttura delle soluzioni. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Metodi risolutivi. Metodo dei coefficienti indeterminati per la risoluzione delle equazioni non omogenee. Oscillatore armonico, anche in fluido viscoso ed eventualmente con termine forzante esterno.

**Testi.**

[1] G. Artico, *Richiami di Matematica*, Edizioni Libreria Progetto, Padova.
[2] G. De Marco, *Analisi Uno*, Decibel-Zanichelli.
[3] G. De Marco, C. Mariconda, *Esercizi di calcolo in una variabile*, Decibel-Zanichelli.
[4] U. Marconi, *Teorema di Weierstrass e teorema dei valori intermedi*, `http://www.math.unipd.it/~umarconi/did/weier.pdf`.