FUNZIONI BILANCIATE

Umberto Marconi

Dipartimento di Matematica Pura e Applicata – Padova

Nel seguito f denota una funzione reale di variabile reale; gli *intervalli* saranno intervalli limitati contenuti nel dominio di f. Se I è un tale intervallo, con f_I si indica la funzione così definita su tutto $\mathbb{R}$:

$$f_I(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \in I, \\ 0 & \text{per } x \in \mathbb{R} \setminus I. \end{cases}$$

La funzione f si dice Riemann-integrabile su I se f_I è Riemann-integrabile.
Funzione semplice significa *funzione a scalino a supporto compatto.*

Definizione 1 *Sia $\varepsilon > 0$ una costante reale positiva e sia I un intervallo. La funzione f si dice ε-inscatolata su I se esistono due funzioni semplici u e v tali che:*

$$u \leq f_I \leq v \qquad \text{e} \qquad v - u \leq \varepsilon$$

Osservazione 2 Non è restrittivo supporre che u e v siano nulle fuori di I, cioè $u = u_I$ e $v = v_I$. Nel seguito sceglieremo u e v nulle fuori di I.

Esempio. La funzione $\sin \frac{1}{x}$ non è $\frac{3}{2}$-inscatolata su $]0, 1]$.

Fatto 1 *Siano I_1 e I_2 intervalli tali che $I = I_1 \cup I_2$ è un intervallo. Se f è ε-inscatolata su I_1 e su I_2, allora f è ε-inscatolata su I.*

Dimostrazione. Esistono funzioni semplici u_1, v_1 e u_2, v_2 tali che:

$$\begin{array}{lcl} u_1 \leq f_{I_1} \leq v_1 & \text{e} & v_1 - u_1 \leq \varepsilon \\ u_2 \leq f_{I_2} \leq v_2 & \text{e} & v_2 - u_2 \leq \varepsilon \end{array}$$

Ponendo ad esempio

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x) & \text{per } x \in I_1 \\ u_2(x) & \text{per } x \in \mathbb{R} \setminus I_1 \end{cases} \qquad v(x) = \begin{cases} v_1(x) & \text{per } x \in I_1 \\ v_2(x) & \text{per } x \in \mathbb{R} \setminus I_1 \end{cases}$$

si ottiene (fare un disegno):

$$u \leq f_I \leq v \qquad \text{e} \qquad v - u \leq \varepsilon$$

Fatto 2 *Sia $[a, b]$ un intervallo compatto. Supponiamo che per ogni $p \in [a, b]$ esista un intervallo $I_p \subseteq [a, b]$ tale che:*

- *$p \in I_p$,*
- *I_p è aperto nella topologia relativa di $[a, b]$,*
- *f è ε-inscatolata su I_p.*

Allora la funzione f è ε-inscatolata su $[a,b]$.

Dimostrazione. La famiglia di aperti relativi $\mathcal{I} = \{I_p : \ p \in [a,b]\}$ è un ricoprimento aperto di $[a,b]$. Siccome $[a,b]$ è compatto, la famiglia $\mathcal{I}$ ammette un sottoricoprimento finito. Pertanto esistono $I_{p_1}, \ldots, I_{p_m}$ tali che $[a,b] = I_{p_1} \cup \ldots \cup I_{p_m}$. La tesi segue iterando il fatto 1.

Proposizione 3 *Se per ogni $\varepsilon > 0$ la funzione f è ε-inscatolata su $[a,b]$ allora f è Riemann-integrabile su $[a,b]$.*

Dimostrazione. Dimostriamo che è soddisfatta la condizione di integrabilità 15.4.3 di [**DM**].
Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\gamma = \frac{\varepsilon}{b-a}$. Poiché f è γ-inscatolata su $[a,b]$, esistono funzioni semplici u e v tali che:

$$u \leq f_{[a,b]} \leq v \qquad \text{e} \qquad v - u \leq \gamma$$

Avendo preso u e v nulle fuori di $[a,b]$, si ottiene:

$$\int_{\mathbb{R}} v - u = \int_{[a,b]} v - u \leq \int_{[a,b]} \gamma = \gamma(b-a) = \varepsilon$$

Il seguente teorema fornisce una descrizione delle funzioni del teorema (3).

Teorema 4 *Le seguenti condizioni sono equivalenti.*

i) *$f_{[a,b]}$ è bilanciata, cioè ammette limite sinistro e limite destro finiti in ogni punto di $\mathbb{R}$.*

ii) *Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che f è ε-inscatolatasu $[a,b]$.*

Dimostrazione. *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Sia $\varepsilon > 0$. Preso $p \in]a,b[$, poiché esistono finiti $f(p^-)$ e $f(p^+)$, esiste un numero $\delta_p > 0$ (e minore di $b - p \wedge p - a$) tale che:

$$\begin{aligned} f(p^-) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(x) \leq f(p^-) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad & \forall\, x \in]p - \delta_p, p[\\ f(p^+) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(x) \leq f(p^+) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad & \forall\, x \in]p, p + \delta_p[\end{aligned}$$

Considerando le funzioni semplici

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \notin]p - \delta_p, p + \delta_p[\\ f(p) & \text{per } x = p \\ f(p^-) - \frac{\varepsilon}{2} & \text{per } x \in]p - \delta_p, p[\\ f(p^+) - \frac{\varepsilon}{2} & \text{per } x \in]p, p + \delta_p[\end{cases} \qquad v(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \notin]p - \delta_p, p + \delta_p[\\ f(p) & \text{per } x = p \\ f(p^-) + \frac{\varepsilon}{2} & \text{per } x \in]p - \delta_p, p[\\ f(p^+) + \frac{\varepsilon}{2} & \text{per } x \in]p, p + \delta_p[\end{cases}$$

si ottiene che f è ε-inscatolata su $]p - \delta_p, p + \delta_p[$.
Analogamente si mostra che f è ε-inscatolata su $[a, a + \delta_a[$ e su $]b - \delta_b, b]$, per opportuni δ_a, δ_b maggiori di 0.
Dal fatto 2 segue che f è ε-inscatolata su $[a,b]$, da cui la tesi (data l'arbitrarietà di ε).

ii) $\Rightarrow$ *i)* Sia $p \in]a,b]$. Vogliamo dimostrare che esiste finito $f(p^-)$ (analogamente si ragionerà per $f(p^+)$, se $p \in [a,b[$).
Per dimostrare l'esistenza del limite fissiamo $\varepsilon > 0$. Siccome f è ε-inscatolata su $[a,b]$, esistono funzioni semplici u_ε, v_ε tali che:

$$u_\varepsilon \leq f_{[a,b]} \leq v_\varepsilon \qquad \text{e} \qquad v_\varepsilon - u_\varepsilon \leq \varepsilon$$

Poiché u_ε e v_ε sono a scalino, esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che $u_\varepsilon(x)$ e $v_\varepsilon(x)$ sono costanti per $x \in]p, p+\delta_\varepsilon[$, sia $u(x) = \alpha_\varepsilon$ e $v(x) = \beta_\varepsilon$ per ogni $x \in]p, p+\delta_\varepsilon[$.
Allora $f(x) \in [\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon]$ per ogni $x \in]p, p+\delta_\varepsilon[$, cioè:

$$f(]p, p+\delta_\varepsilon[) \subseteq [\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon] \quad \text{con } \beta_\varepsilon - \alpha_\varepsilon \leq \varepsilon$$

Questo si può fare per ogni $\varepsilon > 0$. Ora, se $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$, posto $\delta = \min\{\delta_{\varepsilon_1}, \ldots, \delta_{\varepsilon_n}\}$, si ha:

$$f(]p, p+\delta[) \subseteq [\alpha_{\varepsilon_1}, \beta_{\varepsilon_1}] \cap \ldots \cap [\alpha_{\varepsilon_n}, \beta_{\varepsilon_n}]$$

Pertanto la famiglia $\{[\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon] : \varepsilon > 0\}$ è una famiglia di intervalli compatti con la proprietà dell'intersezione finita e quindi ha intersezione non vuota[1]. Poiché $\operatorname{diam}[\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon] \leq \varepsilon$, si ha che esiste unico $l \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\{l\} = \bigcap_{\varepsilon>0} [\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon]$$

Dalla costruzione si deduce che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha:

$$|f(x) - l| \leq \varepsilon \quad \forall\, x \in]p, p+\delta_\varepsilon[$$

da cui la tesi.

Dai precedenti teoremi si deduce il:

Corollario 5 *Ogni funzione bilanciata è localmente Riemann-integrabile.*

Esercizio. (Controesempio.) Sia $g(x) = \sin \frac{1}{x}$ per $x > 0$ e $g(x) = 0$ per $x \leq 0$. La funzione g è Riemann-integrabile su $[0,1]$ ma non è bilanciata.

BIBLIOGRAFIA

[DM] G. De Marco, *Analisi Uno*, Decibel-Zanichelli.

[S] G F. Simmons, *Calculus with Analytic Geometry*, McGraw-Hill, New York (1996).

[1] I chiusi del tipo $[\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon] \cap [\alpha_1, \beta_1]$ formano una famiglia di chiusi con la fip dentro il compatto $[\alpha_1, \beta_1]$.