Teoria delle Funzioni 1

Esercizi di anni precedenti

Gli esercizi che seguono sono stati cortesemente messi a disposizione dal Prof. Burenkov e dal Dott. Lamberti.

Esercizio 1. Dimostrare che i sottospazi lineari:

$$c_0 = \{x \in l^\infty : \lim_{n\to\infty} \xi_n = 0\}, \qquad c = \{x \in l^\infty : \exists \lim_{n\to\infty} \xi_n\}$$

sono sottospazi chiusi di l^∞ e quindi sono di Banach.

Esercizio 2. Dimostrare che l'insieme

$$c_{00} = \{x \in l^\infty : \ \xi_n = 0 \text{ definitivamente}\}$$

è denso in c_0 con la norma $\|\cdot\|_\infty$ ma non è denso in c con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Dimostrare inoltre che c_{00} è denso in tutti gli spazi l^p con $1 \leq p < \infty$.

Esercizio 3. Sia X lo spazio vettoriale costituito dai polinomi su $\mathbb{R}$. Dimostrare che la posizione $\|x\| = \max_{0\leq t\leq 1} |x(t)|$ definisce una norma su X.
Dimostrare inoltre che la funzione $l \in X^f$ definita da $l(x) = x(5)$ non è continua rispetto a tale norma. Cosa succede se al posto di 5 mettiamo $\frac{\pi}{4}$?

Esercizio 4. Sia $C_c(0,1)$ lo spazio delle funzioni continue a supporto compatto contenuto nell'intervallo aperto $(0,1)$, munito della sup norma. Dimostrare che il funzionale l definito da $l(x) = \int_0^1 x(t)\,dt$ è continuo e che $\|l\| = 1$.

Esercizio 5. Sia X uno spazio di Banach e sia $\{l_n\}$ una successione di elementi di X' (ciò significa che l_n sono funzionali lineari continui). Supponiamo che per ogni $x \in X$ esista n_x tale che

$$l_{n_x}(x) = 0$$

Dimostrare che esiste $\overline{n}$ tale che $l_{\overline{n}}$ è il funzionale nullo. *(Sugg.: chi è l'unione dei nuclei dei funzionali l_n? Applicare poi il teorema di Baire.)*

Esercizio 6. È vero che in uno spazio di Hilbert una successione di elementi ortogonali tende debolmente a 0? Se la risposta è negativa, trovare una condizione sufficiente affinché ciò succeda.
Sia $f_n(t) = \cos(2n\pi t)$, $t \in [0,1]$.

i) Calcolare $\|f_n\|$ in $L^2(0,1)$.

ii) Dimostrare che f_n converge debolmente a 0 in $L^2(0,1)$.

iii) Dimostrare che f_n non converge fortemente, cioè non converge nella norma di L^2.

Esercizio 7. Sia $f_n = n\chi_n$, dove χ_n è la funzione caratteristica dell'intervallo $[0, \frac{1}{n}]$.

a) Osservare che f_n converge puntualmente a 0 quasi ovunque.

b) Dimostrare che f_n non converge debolmente in $L^2(\mathbb{R})$.

Esercizio 8. Sia $1 \le p < \infty$ e sia f un elemento non nullo appartenente a $L^p(0,+\infty)$ (per semplicità, supporre $f = |f|$).
Sia:

$$f_n(t) = n^{\frac{1}{p}} f(nt) \quad \forall\ t \in (0,1)$$

a) Dimostrare che la successione $\{f_n\}$ non converge fortemente a 0 in $L^p(0,1)$.

b) Usando un cambiamento di variabile opportuno e la disuguaglianza di Hölder, dimostrare che se $0 < a < b < 1$, allora si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = 0$$

c) Sia ora $1 < p$. Ricordando che le funzioni caratteristiche degli intervalli generano un sottospazio lineare denso in $L^q(0,1)$, dimostrare che la successione f_n converge debolmente a 0 in $L^p(0,1)$.

Esercizio 9.

a) Descrivere la convergenza debole nello spazio $\mathcal{C}[0,1]$ con la norma del massimo modulo.

b) Dimostrare che la funzione

$$T : \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \int_0^1 |f(t)|\, dt$$

è continua per la norma ma non è debolmente continua.

c) Dimostrare che se $\{x_n\}$ è una successione debolmente convergente a x in $\mathcal{C}[0,1]$ allora $T(x_n)$ converge a $T(x)$.

Esercizio 10. Sia H lo spazio delle funzioni reali continue su $[-1,1]$ con il prodotto scalare definito da:

$$(f,g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)\, t^2 dt.$$

Verificare che $1 \perp t$ in H.
Trovare la proiezione di t^2 sulla varietà lineare generata da 1 e t.

Esercizio 11. Sia $1 < p < \infty$.

a) Per ciascun $a \in \mathbb{R}$ determinare tutti i valori di $b \in \mathbb{R}$ tali che la successione di funzioni

$$f_n = n^a \chi_n,$$

ove χ_n è la funzione caratteristica di $[n, n+n^b]$, converge fortemente in $L^p(\mathbb{R})$.

b) Stessa domanda per la convergenza debole.

Esercizio 12. Sia $D \neq \emptyset$ un aperto limitato e connesso di $\mathbb{R}^n$.
Osservare che $L^1(D) \supseteq L^2(D)$ e che l'immersione è continua.
Sia $E = \{g \in L^2(D) : \int_D g(x)\, dx = 1$. Osservare che E è un iperpiano chiuso.

Per ogni $f \in L^2(D)$ sia $\mathrm{pr}_E(f)$ l'elemento f_E di E tale che $f - f_E$ ha norma minima. Dimostrare che:

$$\underset{E}{\mathrm{pr}}(f) = f - \frac{\int_D f(x)\,dx}{|D|} + |D|^{-1},$$

ove $|D|$ indica il volume di D.

Esercizio 13. Siano E uno spazio di Banach ed E' il suo duale. Dimostrare che se $\{x_n\}$ converge fortemente a x in E e $\{f_n\}$ converge debolmente* a f in E', allora $\{f_n(x_n)\}$ converge a $f(x)$ nel corpo degli scalari.

Esercizio 14. Sia H lo spazio delle funzioni reali continue su $[0,1]$ con il prodotto scalare definito da:

$$(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,t\,dt.$$

Verificare che $1 \perp (t-\alpha)$ in H.
Trovare la proiezione di t^2 sulla varietà lineare generata da 1 e t.

Esercizio 15. Sia H lo spazio delle funzioni reali continue su $[0,+\infty[$ con il prodotto scalare definito da:

$$(f,g) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,e^{-t}dt.$$

Trovare $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che le funzioni 1 e $t-\alpha$ sono ortogonali.
Trovare la proiezione di t^2 sulla varietà lineare generata da 1 e t.

Esercizio 16. Siano E uno spazio di Banach ed E' il suo duale. Dimostrare che se $\{x_n\}$ converge fortemente a x in E e $\{f_n\}$ converge debolmente a f in E' allora $\{f_n(x_n)\}$ converge a $f(x)$ nel corpo degli scalari.