DERIVATA DELLE FUNZIONI COMPOSTE

Sia f una funzione reale di variabile reale con dominio un intervallo. Se f è derivabile in un punto x_0, allora:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Questa relazione di limite si può scrivere in termini equivalenti nel seguente modo:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \sigma(x)$$

ove $\sigma(x)$ è infinitesimo per $x \to x_0$.
Di conseguenza la derivabilità di f in x_0 si esprime nella forma:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \sigma(x) \cdot (x - x_0) \qquad (*)$$

Si osservi che l'ultimo addendo è esattamente un $o(x - x_0)$.

Teorema (regola della catena). *Sia f una funzione reale definita in un intorno U di x_0 e derivabile in x_0; sia g una funzione reale definita in un intorno V di $y_0 = f(x_0)$ e derivabile in y_0, con inoltre $f(U) \subseteq V$. Allora la funzione composta $g \circ f$ è derivabile in x_0 e si ha:*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Dimostrazione. Da $(*)$ si ha:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \sigma(x)(x - x_0) \\ g(y) &= g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + \tau(y)(y - y_0) \end{aligned}$$

ove σ è infinitesimo per $x \to x_0$ e τ è infinitesimo per $y \to y_0$.
Sostituendo $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$ si ottiene:

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + \tau(f(x))(f(x) - f(x_0))$$

Si osservi che $\tau(f(x))$ è infinitesimo per $x \to x_0$ perché f è continua in x_0. Sostituendo ora a $f(x) - f(x_0)$ l'espressione $f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$, si ottiene:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))[f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)] + \\ &\quad + \tau(f(x))[f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)] \end{aligned}$$

Si osservi che l'ultimo addendo è $o(x - x_0)$. Sviluppando il secondo addendo si ottiene dunque:

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \cdot (x - x_0) + g'(f(x_0)) \cdot o(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Poiché gli ultimi due addendi sono $o(x - x_0)$, si ottiene:

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

da cui per $(*)$ si ha la tesi. $\square$