Completezza e compattezza

Spazi metrici completi Data una successione $x : \mathbb{N} \to X$, $j \to x_j$, una sua sottosuccessione è la composizione $x \circ \nu$, ove $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è strettamente crescente.
Data una successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$, una sua sottosuccessione si scrive nella forma $(x_{\nu(j)})_{j\in\mathbb{N}}$, ove $\nu(j)$ è strettamente crescente.
Sia $\tilde{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ come sottospazio di $\tilde{\mathbb{R}}$.
Se abbiamo una successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ a valori in uno spazio topologico separato X e $a \in X$, allora:

$$a = \lim_{j\to\infty} x_j \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, V \in \mathcal{I}_a\ \exists\, \bar{j} \text{ tale che } x_j \in V\ \forall\, j \geq \bar{j}$$

cioè la successione sta definitivamente in ogni intorno di a: in tal caso si dice che **la successione converge** ad a.
Se X è metrizzabile dalla metrica d,
la successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge ad $a \iff \lim\limits_{j\to\infty} d(x_j, a) = 0$.

Proposizione 1 *Sia X uno spazio topologico metrizzabile.
Sia $x : \mathbb{N} \to X$ una successione a valori in X e sia $a \in X$.
Allora a è il limite di una sottosuccessione di x se e solo se per ogni intorno V di a si ha $x_j \in V$ per infiniti indici j (cioè la successione si trova* ***frequentemente*** *in ogni intorno di a).*

Definizione 2 *Sia (X, d) uno spazio metrico.
Una successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ è detta di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che:*

$$d(x_n, x_m) \leq \varepsilon\ \forall\, n, m \geq n_\varepsilon$$

Sia $A_m = \{x_j :\ j \geq m\}$ la m-coda della successione.
La successione numerica $(\operatorname{diam} A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ è decrescente; essa tende a 0 se e solo se la successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy.

Proposizione 3 *Ogni successione convergente è di Cauchy.*

Dimostrazione. Se a è il limite, allora esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che la m-coda A_m è contenuta in $B(a, \varepsilon[$.
Pertanto $\operatorname{diam} A_n \leq \operatorname{diam} A_m \leq 2\varepsilon\ \forall\, n \geq m$.

Attenzione: la nozione di successione di Cauchy è di carattere metrico e non topologico.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \arctan t$.
La metrica d_f definita da $d_f(t_1, t_2) = |f(t_1) - f(t_2)|$ induce la topologia usuale su $\mathbb{R}$; la successione dei numeri naturali è di Cauchy nella metrica d_f.

Esercizio. [Esercizio importante.] In $\mathbb{R}^2$ le metriche d_1, d_2, d_∞, oltre a indurre la stessa topologia euclidea (come sappiamo), hanno anche le stesse successioni di Cauchy. Ciò dipende dall'osservazione importante a pag. 10 della dispensa sugli spazi metrici.

Definizione 4 *Uno spazio metrico (X, d) si dice **completo** se ogni successione di Cauchy in (X, d) converge in (X, τ_d).*

Esempi

- Ogni spazio discreto è completo nella metrica discreta.
- $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$ sono completi nella metrica euclidea (dopo).
- $\mathbb{R}$ non è completo nella metrica d_f.

Proposizione 5 *Dati gli spazi metrici (X, d) e (Y, ρ).*
Allora $X \times Y$ con la metrica prodotto d_∞ è completo se e solo se (X, d) e (Y, ρ) sono entrambi completi.

Traccia di dimostrazione. Basta osservare che una successione di punti del prodotto è di Cauchy $\iff$ le successioni "prima componente" e "seconda componente" sono entrambe di Cauchy.

Lemma 6 *Se una successione di Cauchy ha una sottosuccessione convergente, allora è essa stessa convergente.*

Dimostrazione. Sia $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una successione di Cauchy e sia p il limite di una sua sottosuccessione. Fissato $\varepsilon > 0$, sia n_ε un indice tale che $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ per ogni $n, m \geq n_\varepsilon$. Siccome $x_j \in B(p, \varepsilon[$ per infiniti indici j, esiste $\tilde{j} \geq n_\varepsilon$ tale che $d(x_{\tilde{j}}, p) < \varepsilon$. Allora per ogni $n \geq n_\varepsilon$ si ha:

$$d(x_n, p) \leq d(x_n, x_{\tilde{j}}) + d(x_{\tilde{j}}, p) < \varepsilon + \varepsilon$$

Data l'arbitrarietà di ε, ne consegue che la successione converge a p.

Osservando che ogni successione di Cauchy è limitata e che ogni successione limitata di numeri reali ha una sottosuccessione convergente, dal precedente lemma segue che $\mathbb{R}$ è completo.
Usando la Prop. 5 si conclude che $\mathbb{R}^2, \ldots, \mathbb{R}^n$ sono completi.
Dato che $\mathbb{C}$ è isometrico a $\mathbb{R}^2$, segue che $\mathbb{C}^n$ è completo.

Teorema 7
1. *Un sottospazio chiuso di uno spazio metrico completo è completo nella metrica indotta.*
2. *Un sottospazio completo nella metrica indotta è chiuso.*

Proposizione 8 *Siano (X, d) e (Y, ρ) spazi metrici, $T : X \to Y$ una funzione.*

i) Se T è lipschitziana, allora manda successioni di Cauchy in successioni di Cauchy.

ii) Se T è biiettiva, lipschitziana con inversa lipschitziana, allora (X, d) è completo $\iff$ (Y, ρ) è completo.

Dimostrazione. Dimostriamo *i*: la *ii* è una facile conseguenza.
Sia L costante di Lipschitz per T.

Sia $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in X e sia $y_j = Tx_j$ per ogni j.
Consideriamo la m-coda $B_m = \{y_j : j \geq m\}$. Si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{diam} B_m &= \sup\{\rho(y_k, y_l) : \ k, l \geq m\} \leq \\ &\leq \sup\{Ld(x_k, x_l) : \ k, l \geq m\} = L \operatorname{diam} A_m \end{aligned}$$

ove A_m è la m-coda della successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$.
Poiché $\operatorname{diam} A_m \to 0$, si ottiene $\operatorname{diam} B_m \to 0$.

SPAZI COMPATTI

D'ora in poi tutti gli spazi topologici sono di Hausdorff.

Definizione 9 *Uno spazio topologico (X, τ) si dice **sequenzialmente compatto**, o **compatto per successioni**, se ogni successione di punti di X ammette una sottosuccessione convergente in X.*

La dimostrazione della seguente proposizione è una conseguenza immediata del lemma 6.

Proposizione 10 *Sia (X, d) uno spazio metrico.*
Se esso è sequenzialmente compatto allora è completo.

Proposizione 11 *Ogni sottospazio chiuso di uno spazio sequenzialmente compatto è sequenzialmente compatto.*

Dimostrazione. Sia E un sottospazio chiuso dello spazio sequenzialmente compatto X e sia $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una successione di punti di E. Poiché X è sequenzialmente compatto, tale successione ammette una sottosuccessione $(x_{\nu(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ convergente a un punto p di X. Siccome p è limite di una successione di punti di E, si ha che p deve appartenere alla chiusura di E, cioè ad E. Pertanto la successione data ammette una sottosuccessione convergente in E.

Proposizione 12 *I sottospazi sequenzialmente compatti di uno spazio metrico X sono chiusi e limitati in X.*

Dimostrazione. Sia E un sottospazio sequenzialmente compatto di X e sia d la metrica di X. Se $p \in \overline{E}$, esiste una successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ di punti di E convergente a p. Poiché tale successione ammette una sottosuccessione convergente in E e il limite della sottosuccessione non cambia, si ottiene che p deve appartenere ad E. Pertanto $E = \overline{E}$.
Se E non fosse limitato, fissato un punto $q \in X$, l'insieme E non potrebbe essere contenuto in una palla di centro q. Pertanto per ogni $j \in \mathbb{N}$ esisterebbe un punto $q_j \in E$ tale che $d(q_j, q) > j$. Allora tutte le sottosuccessioni di $(q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sarebbero illimitate e quindi tale successione non potrebbe avere una sottosuccessione convergente (ricordiamo che una successione convergente è limitata perché sta definitivamente in ogni intorno del limite).

Teorema 13 *Un sottospazio Y di $\mathbb{R}^n$ è sequenzialmente compatto se e solo se Y è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. *Necessità.* Abbiamo visto che è vera in qualsiasi spazio metrico.
Sufficienza. La dimostriamo in $\mathbb{R}^2$ [v. GDM 10.5.2].
Sia $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una successione di punti di Y. Poiché è limitata, essa ha una sottosuccessione convergente in $\mathbb{R}^2$ [v. GDM 8.9.1]. Poiché Y è chiuso, esso contiene il limite di tale sottosuccessione.

Conseguenze:

- Ogni sottoinsieme sequenzialmente compatto di $\mathbb{R}$ ha massimo e minimo assoluto.
- Le palle chiuse di $\mathbb{R}^n$ sono sequenzialmente compatte.

Il prossimo teorema generalizza il teorema di Bolzano [GDM 10.8.1].

Teorema 14 *Uno spazio metrico Y è sequenzialmente compatto se e solo se per ogni sottoinsieme infinito $E \subseteq Y$ esiste almeno un punto p di Y che è di accumulazione per E (cioè $E' \neq \emptyset$).*

Dimostrazione. Per esercizio.

Teorema 15 *Siano X e Y spazi sequenzialmente compatti. Allora $X \times Y$ è sequenzialmente compatto.*

Dimostrazione. Sia $(x_j, y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ successione di $X \times Y$. Poiché $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ è successione di X, esiste una sottosuccessione $(x_{\nu(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ convergente a un punto $a \in X$; $(y_{\nu(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ è successione in Y e quindi essa ha una sottosuccessione $(y_{\nu(\mu(j))})_{j\in\mathbb{N}}$ convergente a un punto $b \in Y$. Ne consegue che la successione $(x_{\nu(\mu(j))}, y_{\nu(\mu(j))})_{j\in\mathbb{N}}$ converge a (a, b) in $X \times Y$.

Spazi compatti e funzioni continue

L'immagine continua di uno spazio sequenzialmente compatto è uno spazio sequenzialmente compatto, cioè:

Teorema 16 *Se X e Y sono spazi di Hausdorff, con X sequenzialmente compatto, e $f : X \to Y$ è continua, allora $f(X)$ è sequenzialmente compatto.*

Dimostrazione. Sia $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una successione di punti di $f(X)$. Per ogni $j \in \mathbb{N}$ esiste $x_j \in X$ tale che $f(x_j) = y_j$. La successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione $(x_{\nu(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ convergente a un punto $a \in X$. Usando la continuità di f si ottiene che la successione $(f(x_{\nu(j)}))_{j\in\mathbb{N}}$ converge a $f(a)$.

Corollario 17 (Teorema di Weierstrass) *Ogni funzione continua a valori reali definita su un sequenzialmente compatto non vuoto ha minimo e massimo assoluti.*

Dimostrazione. L'immagine è sequenzialmente compatta, quindi chiusa e limitata in $\mathbb{R}$.

Corollario 18 *Siano X e Y spazi metrici con X sequenzialmente compatto. Sia $f : X \to Y$ una funzione continua. Allora f è chiusa.*
Se f è biiettiva, allora f^{-1} risulta continua.
Morale: una biiezione continua con dominio sequenzialmente compatto è un omeomorfismo.

Funzioni uniformemente continue.

Siano (X, d) e (Y, ρ) spazi metrici e $f : X \to Y$ una funzione continua.
Fissiamo un numero reale $\varepsilon > 0$; siccome f è continua, per ogni $x \in X$ esiste $\delta_x > 0$ tale che se $d(z, x) < \delta_x$ allora $\rho(f(z), f(x)) < \varepsilon$.
In genere il numero δ_x varia al variare del punto x e l'estremo inferiore di tali δ_x può essere 0 (prendere per esempio la funzione $f(x) = x^2$).
La funzione f si dice **uniformemente continua** se $\inf_{x\in X} \delta_x > 0$, cioè se esiste un δ che va bene per tutti i punti (fissato ε, naturalmente).

Definizione 19 *f si dice uniformemente continua se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni x_1, $x_2 \in X$ si ha:*

$$d(x_1, x_2) < \delta \quad \Rightarrow \quad \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Esercizio. [Esercizio importante.] Ogni funzione Lipschitziana è uniformemente continua.

Dimostrazione. Sugg.: se l è una costante di Lipschitz, si prenda $\delta = \frac{\varepsilon}{l}$.

Teorema 20 *Sia $f : X \to Y$ una funzione fra spazi metrici (con metriche d e ρ rispettivamente). Se f è continua e il dominio X è sequenzialmente compatto, allora f è uniformemente continua.*

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che f non sia uniformemente continua. Allora scelta una successione δ_j di reali positivi decrescente a 0, esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta_j > 0$ esistono punti x_j, z_j tali che $d(x_j, z_j) < \delta_j$ e $\rho(f(x_j), f(z_j)) > \varepsilon$. Per la compattezza sequenziale di $X \times X$, la successione $(x_j, z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione $w_j = (x_{\nu(j)}, z_{\nu(j)})$ convergente a un punto $(p, q) \in X \times X$. Per la continuità della funzione $f \times f : X \times X \to Y \times Y$ la successione $(f \times f)(w_j)$ converge a $(f(p), f(q))$. Poiché il passaggio al limite conserva le disuguaglianze larghe, si ha $\rho(f(p), f(q)) \geq \varepsilon$. Poiché $d(x_{\nu(j)}, z_{\nu(j)}) < \delta_{\nu(j)} \leq \delta_j$, passando al limite si ottiene $d(p, q) = 0$ e pertanto $p = q$, in contraddizione con $\rho(f(p), f(q)) \geq \varepsilon$.

Esempio. In variabile reale, la funzione $\sqrt{x}$ è un esempio di funzione continua che non è lipschitziana.