Tagli di Dedekind

Sia $\mathbb{K}$ un corpo commutativo linearmente ordinato.
Una coppia (A, B) di sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{K}$ si chiama un *taglio su* $\mathbb{K}$ se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

i) $A < B$, cioè per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$ si ha $a < b$;

ii) $A \cup B = \mathbb{K}$

Se (A, B) è un taglio, allora l'insieme A si chiama ≪sezione inferiore≫ del taglio e l'insieme B si chiama ≪sezione superiore≫ del taglio.

Osserviamo che non è possibile che esistano contemporaneamente sia il massimo della sezione inferiore sia il minimo della sezione superiore, perché il punto medio di questi due estremi non apparterrebbe a nessuna delle sezioni.
Rimangono allora tre casi.

$\boxed{\mathbf{1}}$ La sezione inferiore A ha massimo ξ; in tal caso A coincide con la semiretta chiusa $(-\infty, \xi]$ e B coincide con la semiretta aperta $(\xi, +\infty)$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ La sezione superiore B ha minimo β: in tal caso A coincide con la semiretta aperta $(-\infty, \xi)$ e B coincide con la semiretta chiusa $[\xi, +\infty)$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ La sezione inferiore non ha massimo e la sezione superiore non ha minimo.

Se vale la condizione $\boxed{\mathbf{3}}$ si dice che il taglio è una lacuna.

Esempio. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.
Siano $A = \{x \in \mathbb{Q} : \ x \leq 0 \text{ oppure } x^2 < 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q} : \ x > 0 \text{ e inoltre } x^2 > 2\}$.
Per la crescenza stretta della funzione x^2 sui positivi, si ha $A < B$; inoltre $A \cup B = \mathbb{Q}$ perché il numero 2 non è quadrato di un numero razionale.
Dimostriamo che A non ha massimo.
Sia $x \in A$; se $x \leq 0$ allora $x < 1 \in A$ e quindi x non è massimo.
Se $x > 0$, allora $x^2 < 2$. Cerchiamo un numero razionale δ, con $0 < \delta < 1$, tale che $(x + \delta)^2 < 2$:
si ha $(x + \delta)^2 = x^2 + \delta(2x + \delta) < 2$ se e solo se

$$\delta < \frac{2 - x^2}{2x + \delta}$$

Scegliamo un numero razionale δ, compreso tra 0 e 1, tale che

$$\delta < \frac{2 - x^2}{2x + 1}$$

che esiste per la densità dei razionali in sé. Tale δ soddisfa le proprietà richieste perché $\delta < \frac{2-x^2}{2x+1} < \frac{2-x^2}{2x+\delta}$.
Analogamente si dimostra che B non ha minimo e quindi la coppia (A, B) è una lacuna di $\mathbb{Q}$.

Il seguente teorema è analogo al teorema 0.4.3 del libro di testo e fornisce alcune formulazioni equivalenti dell'assioma di completezza.

Teorema. *Sia $\mathbb{R}$ un corpo commutativo linearmente ordinato.*
Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

i) Dati A, B sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, entrambi non vuoti e con $A \leq B$, esiste un elemento $\xi \in \mathbb{R}$ tale che $A \leq \xi \leq B$.

ii) In $\mathbb{R}$ non esistono lacune.

iii) Ogni sottoinsieme non vuoto superiormente limitato ammette estremo superiore.

iv) Come iii), con $\ll$inf ... $\gg$ al posto di $\ll$sup ... $\gg$.

Dimostrazione. i) $\Rightarrow$ ii) Sia (A, B) un taglio di Dedekind. Dobbiamo dimostrare che (A, B) non è una lacuna, cioè che A ammette massimo o B ammette minimo.
Poiché $A < B$, si ha anche $A \leq B$. Per la i) esiste allora $\xi \in \mathbb{R}$ tale che $A \leq \xi \leq B$. Poiché $\xi \in \mathbb{R} = A \cup B$, si ha per esempio che $\xi \in A$; poiché $A \leq \xi$, otteniamo $\xi = \max A$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Sia S un sottoinsieme non vuoto superiormente limitato e sia $B = S^+$ l'insieme dei maggioranti di S. Poniamo $A = \mathbb{R} \setminus S^+$, cioè il complementare di S^+. Dimostriamo che A non ha massimo. Osserviamo che se $c \in A$ allora $c \notin S^+$, cioè c non è un maggiorante di S; quindi esiste $s \in S$ tale che $c < s$. Ma allora $c < \frac{c+s}{2} < s$ e quindi $\frac{c+s}{2} \in A$, e dunque A non ha massimo. Poiché non esistono lacune, $B = S^+$ ammette minimo ξ, che per definizione è l'estremo superiore di A.

In modo perfettamente analogo si dimostra che ii) $\Rightarrow$ iv).
iii) $\Rightarrow$ i) È esattamente la dimostrazione ii) $\Rightarrow$ i) del teorema 0.4.3 del libro di testo.

iv) $\Rightarrow$ i) Analogo a iii) $\Rightarrow$ i).

L'asserto seguente è esattamente la proposizione al punto 0.4.7 del testo.

Proposizione. *Sia $b > 0$ un numero reale fissato e sia n un numero naturale maggiore di 1. In $\mathbb{R}$ esiste $\xi > 0$ tale che $\xi^n = b$.*
Dimostrazione. Sia $n = 2$. Poniamo:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} :\ x \leq 0 \text{ oppure } x^2 < b\} \\ B &= \{x \in \mathbb{R} :\ x > 0 \text{ e inoltre } x^2 > b\} \end{aligned}$$

Come nel caso razionale (v. esempio) si dimostra che A non ha massimo e B non ha minimo e inoltre $A < B$. Poiché in $\mathbb{R}$ non esistono lacune, si ha che deve esistere un elemento $\xi \in \mathbb{R} \setminus (A \cup B)$. Di conseguenza $\xi^2 = b$.
Per n qualsiasi si proceda come nel libro di testo utilizzando l'esercizio che precede la dimostrazione.