DIFFERENZIAZIONE

1 Regola della catena

Sia f una funzione reale di variabile reale con dominio un intervallo. Se f è derivabile in un punto x_0, allora:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Questa relazione di limite si può scrivere in termini equivalenti nel seguente modo:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \sigma(x)$$

ove $\sigma(x)$ è infinitesimo per $x \to x_0$, o ancora nella forma:

$$f(x) - f(x_0) = [f'(x_0) + \sigma(x)] \cdot (x - x_0) \tag{1}$$

Teorema 1 (Regola della catena) *Sia f una funzione reale definita in un intorno U di x_0 e derivabile in x_0; sia g una funzione reale definita in un intorno V di $y_0 = f(x_0)$ e derivabile in y_0, con inoltre $f(U) \subseteq V$. Allora la funzione composta $g \circ f$ è derivabile in x_0 e si ha:*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Dimostrazione. La (1) e la derivabilità di g portano a:

$$g(y) - g(y_0) = [g'(y_0) + \sigma(y)](y - y_0)$$

ove $\sigma(y)$ è infinitesimo per $y \to y_0$.
Sostituendo $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$, e dividendo tutto per $x - x_0$ si ottiene:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = [g'(f(x_0)) + \sigma(f(x)]\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Si osservi che $\sigma(f(x))$ è infinitesima per $x \to x_0$. Infatti f è continua in x_0, ossia $f(x)$ tende a $f(x_0)$, cioè y tende a y_0, e quindi $\sigma(f(x)) = \sigma(y)$ è infinitesima.
La tesi segue ora passando al limite per $x \to x_0$, in quanto l'ultimo rapporto tende a $f'(x_0)$ e $\sigma(f(x))$ tende a 0.

2 Nomenclatura

- Si dice che una funzione continua $h(x)$ è in x_0 un infinitesimo di ordine superiore a $(x - x_0)$ se $h(x) = \sigma(x)(x - x_0)$, ove $\sigma(x)$ è un'opportuna funzione infinitesima per $x \to x_0$. In tal caso si dice anche che $h(x)$ è in x_0 un infinitesimo di ordine superiore al primo, ovvero che $h(x)$ è *o piccolo* di $x - x_0$.

- Si dice che due funzioni continue $f(x)$ e $g(x)$ hanno in x_0 un contatto di ordine superiore al primo se $f(x) - g(x)$ è in x_0 un infinitesimo di ordine superiore al primo, cioè se $f(x) = g(x) + \sigma(x)(x - x_0)$, ove σ è infinitesima per $x \to x_0$. In tal caso, posto $y_0 = f(x_0) = g(x_0)$, si dice anche che le due curve $y = f(x)$ e $y = g(x)$ hanno in (x_0, y_0) un contatto di ordine superiore al primo.

- Si dice che due funzioni continue $f(x)$ e $g(x)$ sono asintotiche in x_0 se

$$f(x) = g(x) + \sigma(x)g(x)$$

ove σ è infinitesima per $x \to x_0$. Se $g(x) \neq 0$ per $x \neq x_0$, ciò equivale ad affermare che $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Se f e g sono asintotiche in x_0, allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{g}{h}$.

Proposizione 2 *Se f è derivabile in x_0, allora $f(x)$ e $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ hanno in x_0 un contatto superiore al primo. Equivalentemente $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ e $dy = f'(x_0)(x - x_0)$ hanno in x_0 un contatto di ordine superiore al primo.*

Dimostrazione. Discende dall'uguaglianza (1).

Esercizio. Se $f'(x_0) \neq 0$ allora $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ e $dy = f'(x_0)(x - x_0)$ sono asintotiche per $x \to x_0$.

3 Il differenziale

D'ora in poi si suppone che tutte le funzioni siano derivabili su intervalli della retta reale. L'uguaglianza (1) si può anche scrivere nella forma:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0) + \sigma(x)\,(x - x_0) \tag{2}$$

ovvero:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \sigma(x)(x - x_0) \tag{3}$$

Ricordiamo che la retta di equazione $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$, perché la differenza tra $f(x)$ e $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $x - x_0$ per $x \to x_0$. Se poniamo $\Delta x = x - x_0$ e $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, la (2) si può scrivere:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \sigma(x)\Delta x \tag{4}$$

Osserviamo che Δy è l'incremento della variabile dipendente lungo il grafico di f corrispondente all'incremento Δx della variabile indipendente. Inoltre $f'(x_0)\Delta x$ è l'incremento della variabile y lungo il grafico della retta tangente, sempre in corrispondenza all'incremento Δx della variabile x[1]. Tale incremento lungo la retta tangente si chiama *differenziale* di f in x_0 e si scrive:

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x \tag{5}$$

come funzione dell'incremento Δx. Per essere rigorosi (ma non serve) il differenziale di f in x_0 è la funzione lineare dell'incremento $\Delta x \mapsto f'(x_0)\Delta x$.
L'uguaglianza (4) diventa:

$$\Delta y = df(x_0) + \sigma(x)\Delta x \tag{6}$$

Poiché σ è infinitesima per $\Delta x \to 0$ si ottiene che Δy differisce da $df(x_0)$ di un infinitesimo di ordine superiore a Δx.

[1] Verificarlo, tenendo presente la figura 5.3 di **[S]**.

D'ora in poi si scrive x in luogo di x_0 e Δx indica un incremento della variabile x (intuitivamente pensato *piccolo*). Se la variabile x è indipendente, si pone per definizione $dx = \Delta x$. Allora la (5) diventa:

$$df(x) = f'(x)dx \tag{7}$$

Si osservi che la (7) ha senso anche se $x = x(t)$ è variabile dipendente perché:

$$df(x(t)) = f'(x)\, x'(t)dt = f'(x)dx$$

come è assicurato dalla regola della catena, pur di pensare x come funzione di t.
Esempi:

$$dx^n = nx^{n-1}dx \qquad d\sin x = \cos x\, dx$$

Dalle regole di derivazione seguono facilmente le seguenti regole di differenziazione[2]:

$$d(\alpha u + \beta v) = \alpha\, du + \beta\, dv \qquad d(uv) = u\, dv + v\, du \qquad d(\frac{u}{v}) = \frac{v\, du - u\, dv}{v^2}$$

Dalla notazione $dy = f'(x)dx$ segue la notazione $\frac{dy}{dx}$ per la derivata.
Se $y = y(x)$ lega la variabile y alla variabile x e $x = x(t)$ lega la variabile x alla variabile t, possiamo considerare la funzione composta

$$y(t) = y(x(t)) = \Big(y(x)\Big)_{x=x(t)}$$

La regola della catena direbbe che:

$$y'(t) = y'(x(t))x'(t)$$

Questa scrittura non va bene perché y' ha significati diversi a sinistra e a destra. Esclude invece ambiguità ed è più comoda da ricordare la scrittura con i differenziali:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt}$$

ove $\frac{dy}{dx}$ è calcolata in $x = x(t)$. Con questa scrittura la regola della catena si memorizza come *cancellazione formale* dei differenziali.
Esempi.

- Derivare $y = (t^3 + 2)^5$.
  Ponendo $x = t^3 + 2$ possiamo scrivere $y = x^5$. Allora:

  $$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt} = 5x^4 \cdot 3t^2 = 5(t^3 + 2)^4 \cdot 3t^2$$

  Spesso, tenendo presente la relazione fra x e t, non occorre scrivere l'ultima espressione.

- Calcolare $\frac{dy}{dt}$ se $y = \frac{x}{1+x}$ e $x = \frac{t}{1+t}$.
  Poiché $y = 1 - \frac{1}{1+x}$ si ha:

  $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1+x)^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{(1+t)^2}$$

  da cui:

  $$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{(1+x)^2}\,\frac{1}{(1+t)^2}$$

[2] u e v sono funzioni, α e β sono costanti reali.

Da [S]: studiare 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 4.5, 5.1, 5.2 e svolgere i relativi esercizi.

Esercizio. Se $v = v(x)$ è una funzione positiva, allora $\frac{d}{dx}(\log v) = \frac{v'}{v}$. Tale espressione si chiama *derivata logaritmica* di v. Svolgere gli esercizi 18, 19, 20, 21 a pag. 277 di [S].

Osservazione 3 Con queste notazioni si ha $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$; si osservi che il simbolo $\frac{dy}{dx}$ porta con sé la definizione di derivata. Sembra un gioco, ma in realtà sarà molto comodo nell'impostare problemi sulle equazioni differenziali.

4 Il vettore tangente

Consideriamo una curva cartesiana in forma esplicita $y = f(x)$, con f derivabile in ogni punto. In questo contesto, quando scriviamo y, intendiamo che y è il valore di f in x. La variabile y è detta *dipendente*, la variabile x è detta *indipendente*.
Sia

$$\vec{R}(x) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

il raggio vettore condotto dall'origine con la punta in $P = (x, y) = (x, f(x))$. La funzione $\vec{R}(x)$ è una curva parametrica con variabile indipendente x.
Per ogni incremento Δx della variabile indipendente, sia

$$\vec{R}(x + \Delta x) = (x + \Delta x)\vec{\imath} + (y + \Delta y)\vec{\jmath}$$

il vettore spiccato dall'origine con la punta in $Q = (x + \Delta x, y + \Delta y)$, ove

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{8}$$

per cui $Q = (x + \Delta x, f(x + \Delta x))$.
Chiamiamo

$$\Delta\vec{R} = \vec{R}(x + \Delta x) - \vec{R}(x) = \Delta x\,\vec{\imath} + \Delta y\,\vec{\jmath}$$

l'incremento vettoriale da P a Q, corrispondente all'incremento Δx della variabile indipendente (fare un disegno). Al variare di Δx, il vettore $\Delta\vec{R}$ rappresenta il *vettore corda* da P a Q.
Consideriamo il *rapporto incrementale vettoriale*

$$\frac{\Delta\vec{R}}{\Delta x} = \vec{\imath} + \frac{\Delta y}{\Delta x}\vec{\jmath}$$

Definiamo derivata del vettore $\vec{R}(x)$ la grandezza vettoriale:

$$\vec{t} = \frac{d\vec{R}}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta\vec{R}}{\Delta x} = \vec{\imath} + f'(x)\vec{\jmath}$$

Il vettore ottenuto si chiama *vettore tangente* alla curva nel punto $P = (x, y)$, perché dimostreremo che la retta passante per P con direzione $\vec{t}$ ha un contatto di ordine superiore al primo con la curva $y = f(x)$.
L'incremento (8) rappresenta l'incremento della variabile dipendente lungo la curva. Vogliamo trovare ora l'incremento della variabile dipendente lungo la retta tangente.
Un punto (X, Y) appartiene alla retta passante per (x, y) con direzione $\vec{t}$ quando il vettore $(X - x)\vec{\imath} + (Y - y)\vec{\jmath}$ è proporzionale al vettore $\vec{t} = \vec{\imath} + f'(x)\vec{\jmath}$, ovvero

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y \\ 1 & f'(x) \end{vmatrix} = 0$$

ottenendo:

$$Y - y = f'(x)(X - x)$$

L'equazione della retta tangente è dunque

$$Y = y + f'(x)(X - x) \tag{9}$$

ove naturalmente $y = f(x)$. Ponendo:

$$\begin{array}{lll} X = x & \text{otteniamo} & Y = y \\ X = x + \Delta x & \text{otteniamo} & Y = y + f'(x)\Delta x \end{array}$$

Quindi l'incremento lungo la retta tangente è $f'(x)\Delta x$, cioè la pendenza per l'incremento della variabile indipendente. Dopo aver disegnato l'incremento Δy e l'incremento $f'(x)\Delta x$, vogliamo trovare qual è la relazione fra i due incrementi.
Ponendo $\sigma = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)$, si ha che $\sigma \to 0$ e inoltre:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \sigma \Delta x \tag{10}$$

Quindi la differenza fra i due incrementi è un infinitesimo di ordine superiore a Δx (la retta e la curva hanno un contatto di ordine superiore al primo). In simboli:

$$\Delta y \simeq f'(x)\Delta x$$

dove $\simeq$ significa che i due termini differiscono di un *o piccolo* di Δx. Nel caso in cui $f'(x) \neq 0$ possiamo dire che Δy e $f'(x)\Delta x$ sono asintotici, cioè:

$$\Delta y \sim f'(x)\Delta x \quad \text{se } f'(x) \neq 0$$

Ebbene, si chiama *differenziale* di f nell'ascissa x proprio l'incremento della variabile dipendente lungo la retta tangente, come funzione dell'incremento Δx della variabile indipendente e si scrive:

$$dy = f'(x)\Delta x \tag{11}$$

Poiché $dx = 1\Delta x$, si ha che il differenziale della funzione $y = x$ è l'incremento stesso e quindi possiamo scrivere[3]:

$$dy = f'(x)dx \tag{12}$$

cioè il differenziale di y è quella funzione dell'incremento dx che si ottiene moltiplicando l'incremento dx per la derivata prima, calcolata nel punto fissato x. Dall'espressione (12) possiamo scrivere formalmente la derivata prima come rapporto di differenziali:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Con queste convenzioni possiamo anche scrivere:

$$dy = \frac{dy}{dx}dx$$

Infine, poiché $\vec{\imath} + \frac{dy}{dx}\vec{\jmath}$ è un vettore tangente[4], anche moltiplicandolo per l'incremento dx otteniamo un vettore tangente e dunque:

$$d\vec{R} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath}$$

[3] D'ora in poi consideriamo infinitesimo l'incremento dx.
[4] Abbiamo appena dimostrato che la retta ha un contatto di ordine superiore al primo con la curva.

rappresenta un vettore tangente alla curva $y = f(x)$ nel punto (x, y). Il vettore $d\vec{R}$ è il differenziale della curva parametrica $\vec{R}(x)$, cioè del raggio vettore $\vec{R}(x)$.
Poiché $dx = \Delta x$, si ha

$$d\vec{R} = \Delta x\,\vec{\imath} + f'(x)\Delta x\,\vec{\jmath} = \Delta x\,\vec{t}$$

Il vettore $d\vec{R}$ rappresenta l'incremento vettoriale lungo la retta tangente, come funzione dell'incremento Δx della variabile indipendente; il vettore corda $\Delta\vec{R} = \Delta x\,\vec{\imath} + \Delta y\,\vec{\jmath}$ rappresenta invece l'incremento vettoriale lungo la curva (ricordare la (8)). Fare un disegno della curva e dei due vettori applicati al punto $P = (x, y)$. La differenza fra il vettore tangente $d\vec{R}$ e il vettore corda $\Delta\vec{R}$ è un infinitesimo di ordine superiore a Δx:

$$d\vec{R} - \Delta\vec{R} = \Delta x\,\vec{\imath} + f'(x)\Delta x\,\vec{\jmath} - (\Delta x\,\vec{\imath} + \Delta y\,\vec{\jmath}) = (f'(x)\Delta x - \Delta y)\,\vec{\jmath} = (-\sigma\Delta x)\,\vec{\jmath}$$

ove l'ultima uguaglianza segue da (10). Poiché σ è infinitesimo, abbiamo che la differenza è un infinitesimo di ordine superiore all'incremento della variabile indipendente. Inoltre le lunghezze dei due vettori sono asintotiche per $\Delta x \to 0$, nel senso che il loro rapporto tende a 1:

$$\big||d\vec{R}| - |\Delta\vec{R}|\big| \le |d\vec{R} - \Delta\vec{R}| \le |\sigma\Delta x| \le |\sigma|\,|\Delta\vec{R}|$$

Quando definiremo l'ascissa curvilinea, dimostreremo che anche la lunghezza Δs dell'arco di curva tra x e $x + \Delta x$ ha lo stesso carattere di asintoticità.
La puntata continua in **[S, 5.1, 5.2]**

Esercizio. Siano $P = (x, y)$ un punto fissato sulla curva $y = f(x)$ e $Q = (x + \Delta x, y + \Delta y)$ un punto variabile sulla stessa curva. Dimostrare che una retta r passante per P è la retta tangente alla curva se e solo se:

$$\lim_{Q \to P} \frac{\mathrm{dist}(Q, r)}{\overline{PQ}} = 0$$

5 Attenzione

- dx^2 significa $(dx)^2$, cioè $(dx)(dx)$, ove dx è pensato come un incremento infinitesimo della variabile indipendente.
- $d(x^2)$ è invece il differenziale di x^2, che è $2x\,dx$.
- $\frac{dy}{dx}$ è il rapporto fra il differenziale di y e il differenziale di x e coindice con la derivata prima della variabile dipendente y rispetto alla variabile indipendente x.
- $\frac{d^2y}{dx^2}$ non è un rapporto di differenziali ma il simbolo per la derivata seconda della variabile dipendente y rispetto alla variabile indipendente x.
  Il simbolo $\frac{d^2y}{dx^2}$ è un'abbreviazione del simbolo $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}$.

BIBLIOGRAFIA

[DM] G. De Marco, *Analisi Uno*, Decibel-Zanichelli.

[S] G F. Simmons, *Calculus with Analytic Geometry*, McGraw-Hill, New York (1996).