UN TEOREMA DI DINI

Umberto Marconi

Dipartimento di Matematica – Università di Padova

Teorema 1 *Sia X uno spazio compatto e sia $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue a valori reali definite su X e tali che $f_j(x) \leq f_{j+1}(x)$ per ogni $x \in X$ e per ogni $j \in \mathbb{N}$. Se esiste una funzione* ***continua*** *f tale che $f(x)$ è limite puntuale della successione $(f_j(x))$ per ogni $x \in X$, allora la successione (f_j) converge uniformemente a f.*

Dimostrazione. Sia ε un numero positivo arbitrario. Gli insiemi

$$F_j = \{x : \ f(x) - f_j(x) \geq \varepsilon\}$$

sono chiusi e formano una successione decrescente $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$
Siccome $\bigcap_{j \geq 1} F_j = \emptyset$, la famiglia $\{F_j : \ j \in \mathbb{N}\}$ non può avere la proprietà dell'intersezione finita, per cui esiste un indice $\bar{\jmath}$ tale che $F_{\bar{\jmath}} = \emptyset$. Ciò conclude la dimostrazione (perché?).