

SUL PROBLEMA DI DIRICHLET

Umberto Marconi

Dipartimento di Matematica Pura e Applicata – Padova

1 Descrizione del problema

Per il significato dei simboli usati si veda [M].

Indichiamo con u la temperatura di un corpo D . Rispetto al tempo t e alle coordinate (x, y, z) dei punti P la funzione u si può scrivere:

$$u = u(t, P) = u(t, x, y, z)$$

Noi assumiamo che la funzione u abbia le proprietà di regolarità richieste dal contesto e dalle formule che incontreremo. Inoltre vogliamo che il corpo D sia la chiusura di un aperto connesso e che ∂D (frontiera di D) consista di un numero finito di superficie chiuse, “regolari” e orientabili; inoltre per (quasi) ogni punto $p \in \partial D$ deve aver senso definire la normale (versore) entrante in D e la normale uscente da D . La normale \vec{n} in un punto $p \in \partial D$ si ottiene normalizzando il prodotto vettoriale delle due derivate parziali di una parametrizzazione della superficie avendo un po’ di cautela per l’orientazione. Possono comunque esistere parti spigolose, punte o buche cuspidali; l’importante è che siano soddisfatte le ipotesi del teorema della divergenza [DM, 8.10.1].

Se D è una piastra abbiamo due coordinate piane (x, y) e in tal caso ∂D è costituita da curve regolari e la normale non è altro che la normale al vettore tangente, con la solita cura per l’orientazione.

Se il corpo D è isotropo e omogeneo, la temperatura u soddisfa la seguente equazione differenziale, detta *equazione del calore*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

dove a è una costante che dipende dalle caratteristiche fisiche del corpo.

Se la distribuzione di temperatura u è *stazionaria*, cioè in una configurazione di equilibrio indipendente dal tempo, allora la funzione u è *armonica* [M, §8], cioè soddisfa l’equazione di Laplace¹:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

Esempi fisici di funzioni armoniche sono i potenziali gravitazionali e i potenziali elettrostatici in tutti i punti esterni alle masse o alle cariche che producono le forze. Anche il potenziale delle velocità di un fluido incomprimibile senza turbolenza verifica l’equazione 1. Sappiamo che in due variabili reali una funzione è armonica se e solo se è parte reale di una funzione olomorfa.

D’ora in poi consideriamo solo il fenomeno stazionario per la temperatura, che è quindi una funzione armonica $u(P) = u(x, y, z)$.

¹Assumiamo che u sia di classe C^2 all’interno di D e continua su tutto D .

Da un punto di vista fisico è naturale aspettarsi che u possa essere determinata nei punti interni a D conoscendo la misura dei suoi valori sulla frontiera di D ; tali misure forniscono una funzione continua $f(p)$ definita per $p \in \partial D$. Si tratta di un problema al contorno, detto *problema di Dirichlet*, che scriviamo nella forma:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u \upharpoonright \partial D = f \end{cases} \quad (2)$$

In parole, assegnata una funzione continua f su ∂D , il problema di Dirichlet consiste nel trovare una funzione u armonica all'interno di D e continua su \bar{D} tale che $u = f$ su ∂D . Nel linguaggio degli operatori lineari questo problema si può tradurre come segue. Sia H lo spazio lineare delle funzioni continue su D e armoniche all'interno di D e sia C lo spazio lineare delle funzioni continue su ∂D . L'operatore $H \xrightarrow{A} C$ definito da $Au = u \upharpoonright \partial D$ è lineare. Mostriamo che esso ha nucleo nullo, cioè che se una funzione armonica è nulla su ∂D allora è identicamente nulla.

Applicando il teorema della divergenza² [M, §§4,7.1] al campo vettoriale $u(\nabla v)$ [M, formula 2, p. 6 con ∇v al posto di \vec{F}] si ottiene la *identità di Green*:

$$\int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} d\sigma = \int_{\partial D} u(\nabla v) \cdot \vec{n} d\sigma = \int_D (\nabla u) \cdot (\nabla v) dP + \int_D u(\Delta v) dP \quad (3)$$

dove $dP = dx dy$ oppure $dP = dx dy dz$ e $d\sigma$ è il differenziale d'arco o di superficie di ∂D . Se nella formula precedente consideriamo il caso $u = v$ e u è armonica, l'ultimo addendo è nullo e si ottiene:

$$\int_{\partial D} u \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\sigma = \int_D |\nabla u|^2 dP$$

Poiché le funzioni in gioco sono continue, se u è nulla su ∂D gli integrali sono nulli e quindi ∇u è nullo su tutto D e u è costantemente nulla.

Poiché l'operatore A è iniettivo, la soluzione del problema di Dirichlet, se esiste, è unica. A questo punto bisogna determinare il dominio di A^{-1} , cioè di capire per quali funzioni f definite su ∂D esiste la soluzione. È un problema difficile, oggetto di studio ancora oggi; in generale³ l'operatore A non è suriettivo e la geometria di ∂D svolge un ruolo fondamentale nelle risposte che si possono dare. Nel caso di una retta, di un circolo e di una sfera, vedremo come si può arrivare a capire perché esiste sempre la soluzione.

Nota 1 Consideriamo una cuspidale molto aguzza, come la spina di Lebesgue generata dalla rotazione della curva $y = e^{-\frac{1}{x}}$ attorno al semiasse positivo delle ascisse. Supponiamo che questa spina penetri all'interno di una superficie liscia, modificandola. Nella regione racchiusa dalla superficie così modificata esiste una distribuzione armonica di temperatura che è continua su tutti i punti della frontiera tranne che sulla punta della spina. Viceversa, se racchiudiamo una spina aguzza chiusa e limitata entro una superficie liscia molto più grande, esiste su quest'ultima una distribuzione continua di temperatura che non è compatibile con una funzione armonica nella regione compresa fra le due superficie e che abbia limite costantemente uguale a $1 + \delta$ su tutta la superficie cuspidale interna [G, pp. 330-331], [K, p. 238 nota 1, p. 285]. Concludendo, scelta una funzione continua sulla frontiera, può non esserci soluzione in senso classico in presenza di *buche cuspidali*; i *pinnacoli* invece non creano problemi.

² Quando applichiamo il teorema della divergenza usiamo l'ipotesi un po' più restrittiva che le funzioni in gioco siano di classe C^1 su tutto D .

³ Senza rafforzare le ipotesi sulle condizioni al contorno.

2 La funzione di Green

Cerchiamo di risolvere il problema più semplice di trovare un'espressione integrale per A^{-1} , perché tale espressione può aiutarci a studiare la suriettività di A . Si tratta dunque di "ricostruire" una funzione armonica conoscendo la sua restrizione a ∂D .

Fissiamo un punto $Q \in \mathbb{R}^n$, ove $n = 2$ o $n = 3$. Per ogni $P \in \mathbb{R}^n$, con $P \neq Q$, consideriamo il raggio vettore $\vec{r} = P - Q$ e il suo modulo $r = |P - Q|$. Sia $\vec{v} = \frac{\vec{r}}{r} = \nabla r$ il raggio versore [M, §2]. La funzione nella variabile P

$$S(P, Q) = S(r) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log r & \text{se } n = 2, \\ \frac{1}{4\pi r} & \text{se } n = 3. \end{cases} \quad (4)$$

è scritta usando coordinate polari o sferiche di centro Q [M, §3]. Essa è a simmetria sferica e ha un punto singolare in Q . Essa è l'unica funzione armonica a simmetria sferica, a meno di costanti moltiplicative e additive [M, §8]. Si ha inoltre:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{n-1} S(r) = 0 \quad (5)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{n-1} \frac{\partial S}{\partial \vec{v}} = \lim_{r \rightarrow 0} r^{n-1} \frac{\partial S}{\partial r} = -\frac{1}{\sigma_{n-1}}$$

ove σ_{n-1} è la lunghezza del circolo unitario o l'area della sfera unitaria⁴.

Osservazione 2 Osserviamo che nella definizione di $S(P, Q)$ i ruoli di P e di Q sono intercambiabili, nel senso che $S(P, Q) = S(Q, P)$. Quindi, se Q è variabile, S è armonica anche in Q .

Fissiamo il punto singolare $Q \notin \partial D$ e consideriamo la funzione continua $f_Q(p) = S(p, Q)$ per $p \in \partial D$. Possiamo chiederci se per tale funzione f_Q il problema (2) ammette soluzione. Se $Q \notin D$ la risposta è ovviamente affermativa, poiché la funzione $S(P, Q)$ è armonica su tutto D , dato che il punto singolare è esterno.

Nel caso in cui Q appartenga all'interno di D ci chiediamo se esiste una funzione $k(P, Q)$, armonica su tutto l'interno di D , tale che per $p \in \partial D$ si abbia $k(p, Q) = f_Q(p)$. In altre parole, ci si chiede se sulla frontiera la funzione $f_Q(p)$ rappresenta una temperatura di equilibrio possibile.

La funzione $k(P, Q)$ si può costruire in alcuni semplici casi usando il *metodo delle immagini riflesse*.

Esempio 3 Se D è il semipiano⁵ $y \geq 0$, è facile rispondere osservando che $S(P, Q)$ dipende solo dalla distanza da Q e che la frontiera di D è l'asse delle ascisse.

Qual è il punto \tilde{Q} tale che $|P - Q| = |P - \tilde{Q}|$ per ogni punto P dell'asse delle ascisse? Naturalmente \tilde{Q} è il punto simmetrico di Q rispetto all'asse. La funzione $S(P, \tilde{Q})$ coincide con $S(P, Q)$ sull'asse delle ascisse e, essendo armonica per $P \neq \tilde{Q}$, è armonica su tutto il semipiano $y > 0$. La soluzione cercata è $k(P, Q) = S(P, \tilde{Q})$.

In verità, usando un teorema di estensione per i funzionali lineari, si può dimostrare che, se la frontiera è abbastanza liscia, il problema (2) con condizione al contorno $f_Q(p)$ ammette sempre soluzione, che chiameremo $k(P, Q)$.

A questo punto consideriamo la funzione differenza

$$G(P, Q) = S(P, Q) - k(P, Q) \quad (6)$$

⁴ Abbiamo usato che $\frac{\partial}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial}{\partial r}$ [M, fine di pag. 4].

⁵ O il semispazio $z \geq 0$.

La funzione $G(P, Q)$ si chiama *funzione di Green per il problema di Dirichlet*. Essa è univocamente individuata dalle seguenti

Proprietà 4 *i) $G(P, Q)$ è una funzione armonica all'interno di D tranne che nel punto Q , dove è infinita;*

ii) $G(P, Q) - S(P, Q)$ è armonica su tutto l'interno di D e continua su tutto D ;

iii) $G(P, Q)$ è nulla sulla frontiera di D .

Infatti se G_1 e G_2 sono funzioni di Green allora $G_1 - G_2 = (G_1 - S) - (G_2 - S)$ è una funzione armonica su D che è nulla sulla frontiera e quindi è identicamente nulla.

Osservazione 5 Poiché $k(P, Q)$ non ha punti singolari all'interno di D , la funzione di Green $G(P, Q)$ ha gli stessi comportamenti al limite (5) di $S(P, Q)$ nel punto Q . Inoltre si può dimostrare che $G(P, Q) = G(Q, P)$ e dunque, al di fuori della diagonale, $G(P, Q)$ è armonica in entrambe le variabili.

La funzione di Green esiste quasi⁶ sempre, ma la dimostrazione richiede conoscenze di analisi funzionale.

La fede nella sua esistenza può essere consolidata dalla seguente interpretazione elettrostatica. Pensiamo il dominio D come un vuoto limitato da una superficie ∂D che è un conduttore perfetto. La presenza di una carica positiva in un punto Q all'interno di D induce una distribuzione di equilibrio di carica negativa sulla superficie ∂D . Con un'opportuna normalizzazione, il potenziale del campo elettrostatico generato da queste cariche ha le proprietà della funzione di Green [J]. Vediamo ora perché la funzione di Green è cruciale nel problema di Dirichlet. Riscriviamo la formula (3) e teniamo presente che \vec{n} è la normale esterna:

$$\int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} d\sigma = \int_D (\nabla u) \cdot (\nabla v) dP + \int_D u(\Delta v) dP$$

Se scambiamo u con v e facciamo la differenza otteniamo:

$$\int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) d\sigma = \int_D \left(u(\Delta v) - v(\Delta u) \right) dP$$

Se, come per la funzione S , c'è un punto singolare $Q \in D$, questa formula non è corretta. Possiamo però rimpiazzare D con il dominio D_ε ottenuto rimuovendo un disco, o una pallina, di raggio ε centrato nel punto singolare Q : sia B_ε questo disco o questa pallina:

$$\int_{\partial D_\varepsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) d\sigma = \int_{D_\varepsilon} \left(u(\Delta v) - v(\Delta u) \right) dP$$

ove \vec{n} è la normale uscente da D_ε e $\partial D_\varepsilon = \partial D \cup \partial B_\varepsilon$.

Si osservi che, nei punti di ∂B_ε , la normale uscente da D_ε è entrante in B_ε (fare un disegno).

Se u e v sono armoniche su D_ε otteniamo:

$$\int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) d\sigma + \int_{\partial B_\varepsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) d\sigma = 0$$

ove \vec{n} è la normale uscente da D ed entrante in B_ε .

⁶Vedi [K, p. 238 nota 1].

Se portiamo a destra il secondo integrale, invece di cambiare il segno ci accordiamo di considerare \vec{n} come normale uscente in entrambi i termini:

$$\int_{\partial D} (u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}) d\sigma = \int_{\partial B_\varepsilon} (u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}) d\sigma$$

Si osservi che la formula è vera per funzioni armoniche con al più una singolarità nel punto Q .

Riscriviamo ora la formula prendendo come u la funzione armonica per cui $u \upharpoonright \partial D = f$ e come v la funzione di Dirichlet $G(P, Q)$, ove Q è per ora fissato all'interno di D . Poiché gli integrali sono sulla frontiera, la variabile di integrazione è il punto $p \in \partial D$ e il punto $P \in \partial B_\varepsilon$:

$$\int_{\partial D} (f \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} - G \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}) d\sigma = \int_{\partial B_\varepsilon} (u \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} - G \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}) d\sigma \quad (7)$$

ove in entrambi i termini \vec{n} rappresenta la normale uscente dalla superficie di integrazione. Tenendo conto che la funzione G è nulla su ∂D , se scriviamo (7) con i termini scambiati otteniamo:

$$\int_{\partial B_\varepsilon} (u \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} - G \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}) d\sigma = \int_{\partial D} f \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} d\sigma = \int_{\partial D} f(p) \frac{\partial G(p, Q)}{\partial \vec{n}} d\sigma(p) \quad (8)$$

ove le derivazioni di G sono fatte rispetto alla prima variabile. Il termine di destra è un'espressione nota, perché conosciamo f e possiamo costruire G partendo dalle proprietà caratteristiche 4, pag. 4. Il termine di sinistra, che è costante, coincide con il suo limite per $\varepsilon \rightarrow 0$.

Per fare il conto teniamo presente che per ∂B_ε si ha $\vec{n} = \vec{v} = \text{raggio versore spiccato da } Q$ e che $d\sigma = \varepsilon^{n-1} ds$, ove ds è il differenziale d'arco del circolo unitario oppure il differenziale di superficie della sfera unitaria.

Per ∂B_ε usiamo la parametrizzazione $P = Q + \varepsilon \vec{v}$, ove \vec{v} è funzione di uno o due parametri angolari a seconda che sia il versore del circolo unitario o della sfera unitaria (indicheremo entrambi con \mathbb{S}):

$$\begin{aligned} & \int_{\partial B_\varepsilon} (u \frac{\partial G}{\partial \vec{v}} - G \frac{\partial u}{\partial \vec{v}}) d\sigma = \\ &= \int_{\partial B_\varepsilon} u \frac{\partial G}{\partial \vec{v}} d\sigma - \int_{\partial B_\varepsilon} G \frac{\partial u}{\partial \vec{v}} d\sigma = \\ &= \int_{\mathbb{S}} u(Q + \varepsilon \vec{v}) \frac{\partial G}{\partial \vec{v}}(Q + \varepsilon \vec{v}, Q) \varepsilon^{n-1} ds - \int_{\mathbb{S}} \varepsilon^{n-1} G(Q + \varepsilon \vec{v}, Q) \frac{\partial u}{\partial \vec{v}}(Q + \varepsilon \vec{v}) ds \end{aligned}$$

Per l'osservazione 5 la funzione G ha in Q il comportamento asintotico dato da (5) e quindi:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{n-1} G(Q + \varepsilon \vec{v}, Q) \frac{\partial u}{\partial \vec{v}}(Q + \varepsilon \vec{v}) = 0 \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(Q + \varepsilon \vec{v}) \varepsilon^{n-1} \frac{\partial G}{\partial \vec{v}}(Q + \varepsilon \vec{v}, Q) = u(Q) \left(-\frac{1}{\sigma_{n-1}} \right) \end{aligned}$$

ove σ_{n-1} è la lunghezza del circolo unitario o l'area della sfera unitaria. Portando il limite dentro il segno di integrale si ottiene il seguente valore dell'integrale su ∂B_ε :

$$\int_{\mathbb{S}} u(Q) \left(-\frac{1}{\sigma_{n-1}} \right) ds = u(Q) \left(-\frac{1}{\sigma_{n-1}} \right) \sigma_{n-1} = -u(Q)$$

Sostituendo in (8) abbiamo:

$$-u(Q) = \int_{\partial D} f(p) \frac{\partial G(p, Q)}{\partial \vec{n}} d\sigma(p)$$

ove \vec{n} è la normale esterna. Se chiamiamo invece \vec{n} la normale entrante abbiamo finalmente l'espressione della funzione armonica in termini dei suoi valori alla frontiera:

$$u(Q) = \int_{\partial D} f(p) \frac{\partial G(p, Q)}{\partial \vec{n}} d\sigma \quad (9)$$

Considerazioni 6 A questo punto è doveroso dire qualcosa sul risultato ottenuto.

- a) Se abbiamo una funzione armonica u ed f è la sua restrizione alla frontiera, allora *per forza* i valori di u sono legati ai valori alla frontiera dalla formula (9).
- b) Se abbiamo solo una funzione continua f su ∂D , comunque la funzione $u(Q)$ definita da (9) non ha punti singolari Q all'interno di D , perché la variabile di integrazione p corre sulla frontiera ∂D , e quindi (p, Q) non ha punti sulla diagonale di $D \times D$. Usando il fatto che la funzione $G(P, Q)$ è armonica in entrambe le variabili (v. oss. 5), possiamo vedere che la funzione $u(Q)$ ottenuta è armonica. Infatti, portando il laplaciano in Q all'interno dell'integrale otteniamo:

$$\Delta u(Q) = \int_{\partial D} f(p) \Delta_Q \left(\frac{\partial G(p, Q)}{\partial \vec{n}_p} \right) d\sigma$$

Poiché tutto è continuo, gli operatori differenziali si possono scambiare ottenendo:

$$\Delta u(Q) = \int_{\partial D} f(p) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_p} (\Delta_Q G(p, Q)) d\sigma = 0$$

perché G è armonica anche in Q .

- c) Allora qual è il problema? Perché l'espressione (9) non fornisce la soluzione del problema di Dirichlet (2)?

Perché **non** è detto che, preso $p_0 \in \partial D$ si abbia:

$$\lim_{Q \rightarrow p_0} \int_{\partial D} f(p) \frac{\partial G(p, Q)}{\partial \vec{n}} d\sigma(p) = f(p_0)$$

L'unica cosa che si può dire è che, se la soluzione esiste, essa necessariamente è data dall'espressione (9). Questo è di grande aiuto, come vedremo nei prossimi due esempi.

- d) Se prendiamo $G(P, Q)$, con Q fissato all'interno di D e P variabile in $D \setminus \{Q\}$, per la proprietà *i*) in 4 si ha $\lim_{P \rightarrow Q} G(P, Q) = +\infty$ (v. anche (4)). Esiste allora $\varepsilon > 0$ tale che $G(P, Q) > 0$ per ogni P in ∂B_ε . Su $D_\varepsilon = D \setminus B_\varepsilon$ la funzione $G(P, Q)$ della variabile P è armonica non costante e come tale il suo valore minimo non può essere assunto in punti interni [M, corollario 7]. Poiché essa è nulla su ∂D , otteniamo che $G(P, Q) > 0$ per ogni P interno a D e che $G(p, Q) = 0$ per ogni $p \in \partial D$. Di conseguenza, essendo \vec{n} la normale entrante, il nucleo integrale $\frac{\partial G(p, Q)}{\partial \vec{n}}$ è non negativo

per ogni $p \in \partial D$.
La funzione⁷

$$\frac{\partial G(p, Q)}{\partial \vec{n}} \quad (10)$$

si chiama *nucleo integrale per il problema di Dirichlet* perché permette di scrivere esplicitamente la soluzione nel caso essa esista.

3 Il semipiano

Sia D il semipiano $y \geq 0$; naturalmente ∂D è l'asse orizzontale $(x, 0)$. Supponiamo di avere una funzione continua e **limitata** $f(x) = f(x, 0)$, definita sulla frontiera. Dobbiamo trovare una funzione $u(x, y)$, continua su D e armonica per $y > 0$ tale che $u(x, 0) = f(x)$. Per le considerazioni dell'esempio 3 la funzione di Green per questo problema è data da:

$$G(P, Q) = S(P, Q) - S(P, \tilde{Q}) = \frac{1}{2\pi}(-\log |P - Q|) + \log |P - \tilde{Q}|$$

ove Q è pensato fissato nel semipiano $y > 0$ e \tilde{Q} è l'immagine riflessa di Q rispetto all'asse orizzontale.

Siano $P(x, y)$ con $y \geq 0$ e $Q(\xi, \eta)$ con $\eta > 0$ le coordinate del punto variabile P e del punto fisso Q ; il riflesso è $\tilde{Q}(\xi, -\eta)$.

Purtroppo il dominio D è illimitato, ma questa difficoltà si aggira invadendo D con semicerchi S di centro l'origine, lungo i quali il contributo di $\int_{\partial S} f \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} d\sigma$ tende a 0 quando il raggio tende all'infinito, pur di aver esteso f a una funzione continua e limitata su tutto il semipiano.

Scriviamo ora $G(P, Q)$ con le coordinate:

$$G(P, Q) = G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}(-\log \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} + \log \sqrt{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2})$$

Poiché la frontiera è l'asse orizzontale, si ha $\vec{n} = \vec{e}_2$ e $\frac{\partial G}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial G}{\partial y}$.

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{n}} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-(y - \eta)}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} + \frac{(y + \eta)}{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2} \right)$$

Poiché interessano i valori alla frontiera, il nucleo integrale cercato è:

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}(x, 0, \xi, \eta) = \frac{\eta}{\pi} \cdot \frac{1}{(x - \xi)^2 + \eta^2} \quad (11)$$

La soluzione del problema di Dirichlet per il semipiano è dunque:

$$u(\xi, \eta) = \frac{\eta}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{(x - \xi)^2 + \eta^2} dx \quad (12)$$

Esercizio. Verificare che se f è la costante 1, anche la funzione $u(\xi, \eta)$ in (12) risulta costantemente uguale a 1.

⁷ La derivazione è fatta rispetto alla prima variabile.

Osservazione 7 Sia $M \geq 0$ tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si ha:

$$\begin{aligned} |u(\xi, \eta)| &= \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{1 + \left(\frac{x-\xi}{\eta}\right)^2} \frac{1}{\eta} dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{M}{1 + \left(\frac{x-\xi}{\eta}\right)^2} \frac{1}{\eta} dx = \\ &= \frac{M}{\pi} \left[\arctan \frac{x-\xi}{\eta} \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} = M \end{aligned}$$

Pertanto la funzione armonica $u(\xi, \eta)$ ha gli stessi estremi di f . Poiché l'integrazione sui semicerchi dava contributo infinitesimo pur di cercare una soluzione limitata, otteniamo che la soluzione del problema di Dirichlet per il semipiano è unica tra le funzioni armoniche limitate. Per esempio, esiste un'unica funzione armonica limitata sul semipiano che coincide con $\sin x$ sull'asse reale, ma essa si guarda bene dall'essere $\Re \sin z = \sin \xi \cosh \eta$; integrando con il metodo dei residui la (12) con $f(x) = \sin x$, si ottiene che $u(\xi, \eta) = \sin \xi e^{-\eta}$ è l'unica funzione armonica limitata sul semipiano che coincide con $\sin x$ sull'asse reale. Non sarebbe difficile dimostrare che se la funzione limitata $f(x)$ ammette limite all'infinito, anche $u(\xi, \eta)$ ammette lo stesso limite all'infinito.

A questo punto rimane da vedere che il problema di Dirichlet per il semipiano (con f continua limitata) ammette sempre soluzione. Per le considerazioni 6 b, c rimane da dimostrare che

$$\lim_{(\xi, \eta) \rightarrow (x, 0)} u(\xi, \eta) = f(x)$$

Questo è vero, ma non è facile e richiede uno studio delle proprietà del nucleo integrale (11)

$$h_\eta(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\eta}{x^2 + \eta^2}, \quad \text{con } \eta > 0.$$

Si osservi che la soluzione (12) si può vedere come il prodotto di convoluzione di f con il nucleo integrale $h_\eta(x)$.

4 Il cerchio

Consideriamo il disco piano D definito dalla disequazione $x^2 + y^2 \leq R_0^2$ e sia $Q(\xi, \eta)$ un punto fissato all'interno di D .

Se (ρ, φ) sono le coordinate polari di Q , si ha $\xi = \rho \cos \varphi$, $\eta = \rho \sin \varphi$, ove ρ e φ sono valori assegnati con $\rho < R_0$.

Prendiamo ora un punto variabile $P(x, y)$ con $P \neq Q$. Siano (R, ϑ) le coordinate polari variabili di P , per cui $x = R \cos \vartheta$, $y = R \sin \vartheta$. Naturalmente $P \in \partial D$ significa $R = R_0$. Sia \tilde{Q} l'immagine riflessa di Q mediante l'inversione per raggi reciproci rispetto al cerchio di raggio R_0 . Le coordinate polari di \tilde{Q} saranno $\left(\frac{R_0^2}{\rho}, \varphi\right)$. Riassumendo, le coordinate polari dei punti sono:

$$O(0, 0), \quad Q(\rho, \varphi), \quad \tilde{Q}\left(\frac{R_0^2}{\rho}, \varphi\right), \quad P(R, \vartheta)$$

Come in 4 poniamo $r = |P - Q|$ e sia $\tilde{r} = |P - \tilde{Q}|$. Mostriamo che se $P \in \partial D$, cioè $|P - O| = R_0$, i due triangoli che hanno OP come lato comune e Q oppure \tilde{Q} come terzo

A noi interessano i valori sul circolo di frontiera e dunque torna ad essere $R = R_0$.

$$\begin{aligned} r^2 &= R_0^2 - 2R_0\rho \cos(\vartheta - \varphi) + \rho^2 \\ \tilde{r}^2 &= R_0^2 - 2R_0\tilde{\rho} \cos(\vartheta - \varphi) + \tilde{\rho}^2 \end{aligned}$$

Le derivate alla frontiera sono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r^2}{\partial R} &= 2R_0 - 2\rho \cos(\vartheta - \varphi) \\ \frac{\partial \tilde{r}^2}{\partial R} &= 2R_0 - 2\tilde{\rho} \cos(\vartheta - \varphi) \end{aligned}$$

Esce così l'espressione del nucleo integrale calcolato sul circolo ∂D :

$$\frac{\partial G}{\partial \tilde{n}}(R_0, \vartheta, \rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{R_0 - \rho \cos(\vartheta - \varphi)}{R_0^2 - 2R_0\rho \cos(\vartheta - \varphi) + \rho^2} - \frac{R_0 - \tilde{\rho} \cos(\vartheta - \varphi)}{R_0^2 - 2R_0\tilde{\rho} \cos(\vartheta - \varphi) + \tilde{\rho}^2} \right)$$

Tenendo conto che $\tilde{\rho} = \frac{R_0^2}{\rho}$, dopo facili calcoli, si ottiene per il nucleo integrale l'espressione:

$$\frac{\partial G}{\partial \tilde{n}} = \frac{1}{2\pi R_0} \frac{R_0^2 - \rho^2}{R_0^2 - 2R_0\rho \cos(\vartheta - \varphi) + \rho^2} \quad (14)$$

Si osservi che il denominatore non è altro che r^2 .

Se $f(\vartheta) = f(R_0 \cos \vartheta, R_0 \sin \vartheta)$ è la funzione continua assegnata sulla frontiera, la soluzione del problema di Dirichlet è data dalla formula:

$$u(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R_0^2 - \rho^2}{R_0^2 - 2R_0\rho \cos(\vartheta - \varphi) + \rho^2} f(\vartheta) d\vartheta \quad (15)$$

dove si è tenuto conto della semplificazione con l'elemento $R_0 d\vartheta$ del differenziale d'arco. Sappiamo che la funzione trovata è armonica nel disco aperto $\rho < R_0$.

È possibile dimostrare che $\lim_{\rho \rightarrow R_0} u(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = f(\varphi) = f(R_0 \cos \varphi, R_0 \sin \varphi)$. Se facciamo un atto di fede, si ottiene il teorema

Teorema 8 *Sia f una funzione reale continua, periodica di periodo 2π .*

Poniamo $f(R_0 \cos \vartheta, R_0 \sin \vartheta) = f(\vartheta)$.

Esiste una funzione u , continua sul disco chiuso e armonica sul disco aperto, tale che $u(R_0 \cos \vartheta, R_0 \sin \vartheta) = f(\vartheta)$. Tale u è unica ed è data dalla formula (15).

Il nucleo integrale $P_\rho(\vartheta) = \frac{R_0^2 - \rho^2}{R_0^2 - 2R_0\rho \cos(\vartheta - \varphi) + \rho^2}$ si chiama *nucleo integrale di Poisson*.

Si osservi che la soluzione del problema di Dirichlet per il cerchio si scrive come un prodotto di convoluzione sul circolo normalizzato di $P_\rho(\vartheta)$ con $f(\vartheta)$.

Osservazione 9 La formula (15) ci dice anche che per una funzione armonica u il valore $u(0)$ è la media dei valori su qualsiasi circolo di centro $(0,0)$ e raggio arbitrario, purché il disco sia contenuto nel dominio. Da questa proprietà si ottiene facilmente che una funzione armonica non può avere massimi e minimi assunti in punti interni, a meno che non sia costante.

Mediante l'inversione per raggi reciproci si può ricavare anche la funzione di Green per la sfera.

Nota 10 Tenendo conto che per la sfera il problema di Dirichlet ha sempre soluzione, siamo in grado di precisare meglio il contenuto della nota 1. Chiediamoci se è possibile fissare arbitrariamente i valori al contorno di una funzione continua f su una sfera modificata mediante un chiodo unidimensionale C che penetra all'interno. In questo caso la frontiera è costituita dalla superficie

sferica e dalla linea C . Sia f una funzione continua nulla sulla superficie sferica e non negativa sui punti di C che penetrano all'interno. Supponiamo che esista la soluzione u per il problema di Dirichlet. Per ogni $\varepsilon > 0$ consideriamo la funzione v_ε così definita:

$$v_\varepsilon = \varepsilon \int_C \frac{1}{r} ds$$

cioè:

$$v_\varepsilon(P) = \varepsilon \int_C \frac{1}{|P-Q|} ds(Q)$$

Poiché il laplaciano si può portare dentro l'integrale per tutti i punti $P \notin C$, si ha che la funzione u_ε è armonica sul complementare di C . Poiché C è 1-dimensionale, si ha che il limite di u_ε è $+\infty$ nei punti di C ; inoltre u_ε è positiva. Poiché f è limitata, per una famiglia di superficie arbitrariamente vicine al chiodo C si ha che $u \leq v_\varepsilon$. Essendo u nulla sulla superficie sferica, per il principio di massimo (minimo), si ha che $u \leq v_\varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$. Analogamente si ottiene $v_{-\varepsilon} \leq u$ per ogni $\varepsilon > 0$. Passando al limite in entrambe le disuguaglianze si ottiene che u deve essere identicamente nulla, per cui i valori di f sul chiodo non possono essere arbitrari. Pertanto il problema non ha soluzione se f è positiva nei punti del chiodo.

Purtroppo la frontiera che abbiamo costruito non soddisfa le ipotesi del teorema della divergenza. Se vogliamo costruire una frontiera più simpatica, dobbiamo sostituire il chiodo unidimensionale con una spina di Lebesgue: in questo caso le argomentazioni sono piuttosto complicate.

BIBLIOGRAFIA

- [D] G. De Marco, *Analisi Due*, Decibel Zanichelli (1999).
- [J] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley-Interscience Publications, New York (1962).
- [G] P. R. Garabedian, *Partial differential equations*, John Wiley & Sons, Inc (1964).
- [K] O. D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory*, Julius Springer, Berlin (1929).
- [M] U. Marconi, *Integrali di superficie*,
<http://www.math.unipd.it/~umarconi/did/intsup.pdf>.