DISUGUAGLIANZE

Umberto Marconi

Dipartimento di Matematica Pura e Applicata – Padova

1 Premessa

Riassumiamo alcune disuguaglianze standard riguardanti somme e integrali (le dimostrazioni seguiranno più avanti). In tutte queste disuguaglianze le quantità possono essere numeri reali o complessi; le somme sono da 1 a n oppure da 1 a ∞, e nel secondo caso sono coinvolte certe evidenti assunzioni e implicazioni di convergenza. Le disuguaglianze per gli integrali riguardano funzioni misurabili definite su un insieme misurabile.

- Disuguaglianza di Hölder per le somme.
  se $1 < p < \infty$ e $q = \frac{p}{p-1}$, cioè $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ si ha:

  $$|\sum a_\nu \overline{b_\nu}| \leq \sum |a_\nu b_\nu| \leq \left(\sum |a_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |b_\nu|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

  Il segno di uguaglianza sussiste esattamente quando $\arg a_\nu \overline{b_\nu}$ non dipende da ν e $|a_\nu|^p$ e $|b_\nu|^q$ sono n-uple proporzionali.
  Il caso speciale $p = q = 2$ si chiama *disuguaglianza di Cauchy*:

  $$\left|\sum a_\nu \overline{b_\nu}\right|^2 \leq (\sum |a_\nu|^2)(\sum |b_\nu|^2)$$

- Disuguaglianza di Minkowski per le somme.
  Se $1 \leq p < \infty$ si ha:

  $$\left(\sum |a_\nu + b_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum |a_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

  Se $p > 1$ la disuguaglianza è stretta tranne nel caso in cui una delle due successioni sia multiplo positivo dell'altra.

- Disuguaglianza di Jensen.
  Se $0 < r < s$ si ha:

  $$\left(\sum |a_\nu|^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\sum |a_\nu|^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

- Disuguaglianza di Hölder per gli integrali.
  Se $1 < p < \infty$ e $q = \frac{p}{p-1}$ si ha:

  $$|\int f(x)\overline{g(x)}dx| \leq \int |f(x)g(x)|dx \leq (\int |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} (\int |g(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}}$$

  Nel caso in cui (quasi ovunque) $\arg f(x)\overline{g(x)}$ sia costante e $|f(x)|^p$ sia proporzionale a $|g(x)|^q$, la disuguaglianza di Hölder diventa un'uguaglianza.
  Il caso speciale $p = q = 2$ si chiama *disuguaglianza di Schwarz*.

- Disuguaglianza di Minkowski per gli integrali.
  Se $1 \leq p < \infty$ si ha:

$$(\int |f(x) + g(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} \leq (\int |f(x)|^p)^{\frac{1}{p}} + (\int |g(x)^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

  Se $p > 1$ la disuguaglianza è stretta tranne nel caso in cui una delle due funzioni sia multiplo positivo dell'altra.

2 Somme finite

(V. *Hardy, Littlewood, Pólia*, Inequalities, Cambridge University Press.)
Nel seguito avremo a che fare con n-uple di numeri reali non negativi, indicate con a (o b o c, ...), diciamo $a = (a_1, a_2, \dots, a_\nu, \dots, a_n)$, ove $a_\nu \geq 0$ per ogni ν.
Il simbolo r indicherà un numero reale diverso da zero.
Il simbolo compatto $\sum a^r$ significa $\sum_{\nu=1}^n a_\nu^r$ (se $r < 0$ allora deve essere $a_\nu > 0$).
Si chiama *media aritmetica di ordine* r l'espressione $\mathfrak{M}_r$ così definita:

$$\mathfrak{M}_r = \mathfrak{M}_r(a) = \left(\frac{1}{n} \sum a^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

In particolare l'usuale media aritmetica è:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(a) = \mathfrak{M}_1(a)$$

e la media armonica è

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(a) = \mathfrak{M}_{-1}(a)$$

L'usuale media geometrica è indicata con

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(a) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \sqrt[n]{\prod a}$$

2.1 Medie pesate

Se abbiamo una successione di pesi

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_\nu, \dots, p_n), \qquad \text{ove } p_\nu > 0 \ \forall \, \nu$$

possiamo scrivere la media pesata di ordine r

$$\mathfrak{M}_r = \mathfrak{M}_r(a) = \mathfrak{M}_r(a, p) = \left(\frac{\sum p a^r}{\sum p}\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\sum \frac{p}{\sum p} a^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

ove $\sum p a^r = \sum_{\nu=1}^n p_\nu a_\nu^r$.
Nel seguito con $\mathfrak{M}_r$ indichiamo la media pesata, con p sottinteso.
Analogamente per la media geometrica si ha:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(a) = \mathfrak{G}(a, p) = \left(\prod a^p\right)^{\frac{1}{\sum p}}$$

ove $\prod a^p$ significa $\prod_{\nu=1}^n a_\nu^{p_\nu}$ (l'esponente $\frac{1}{\sum p}$ si potrebbe distribuire su ogni esponente p_ν del prodotto).

È comodo usare successioni di pesi normalizzate, ponendo $q = \frac{p}{\sum p}$, in modo che $\sum q = 1$. Nel seguito q indica una successione di pesi normalizzata. Abbiamo allora:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_r(a) &= \left(\sum qa^r\right)^{\frac{1}{r}} \qquad (\sum q = 1)\\ \mathfrak{G}(a) &= \prod a^q \qquad (\sum q = 1)\end{aligned}$$

È importante osservare che sia $\mathfrak{M}_r(a)$ sia $\mathfrak{G}(a)$ sono comprese fra $\min a$ e $\max a$. Dimostriamo che:

$$\lim_{r\to 0^+} \mathfrak{M}_r(a) = \mathfrak{G}(a) \tag{1}$$

Se $a_\nu > 0$ per ogni ν scriviamo:

$$\mathfrak{M}_r(a) = (\sum qa^r)^{\frac{1}{r}} = \exp\left(\frac{1}{r}\log(\sum qa^r)\right)$$

L'argomento dell'esponenziale si può scrivere:

$$\frac{1}{r}\log(1 + \sum q(a^r - 1)) = \frac{1}{r}\big(\sum q(a^r - 1) + o(r)\big) = \sum q\frac{a^r - 1}{r} + \frac{o(r)}{r}$$

Passando al limite l'argomento dell'esponenziale tende a

$$\sum q \log a = \log \prod a^q$$

da cui:

$$\lim_{r\to 0^+} \mathfrak{M}_r(a) = \exp\log \prod a^q = \prod a^q = \mathfrak{G}(a)$$

Se in a c'è qualche 0, indichiamo con b i positivi tra gli a e con s i q corrispondenti a tali b (naturalmente $\sum s < 1$ e $\mathfrak{G}(a) = 0$). Allora

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_r(a, q) &= (\sum qa^r)^{\frac{1}{r}} = (\sum sb^r)^{\frac{1}{r}} = (\sum s)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{\sum sb^r}{\sum s}\right)^{\frac{1}{r}} =\\ &= (\sum s)^{\frac{1}{r}}\mathfrak{M}_r(b, s) \to 0 \cdot \mathfrak{G}(b) = 0\end{aligned}$$

ove la media geometrica $\mathfrak{G}(b)$ è calcolata con i pesi s.

2.2 Disuguaglianza di Cauchy

Per dimostrare la disuguaglianza di Cauchy

$$(\sum ab)^2 \le (\sum a^2)(\sum b^2)$$

cioè

$$(\sum a_\nu b_\nu)^2 \le (\sum a_\nu^2)(\sum b_\nu^2)$$

osserviamo che essa si può riscrivere:

$$\sum_\nu a_\nu^2 b_\nu^2 + \sum_{\nu<\mu} 2a_\nu b_\nu a_\mu b_\mu \le \sum_\nu a_\nu^2 b_\nu^2 + \sum_{\nu<\mu}(a_\nu^2 b_\mu^2 + a_\mu^2 b_\nu^2)$$

Con le opportune semplificazioni essa si riporta alla disuguaglianza:

$$0 \le \sum_{\nu<\mu} (a_\nu^2 a_\mu^2 - 2a_\nu b_\nu a_\mu b_\mu + a_\mu^2 b_\nu^2)$$

cioè:

$$0 \le \sum_{\nu<\mu} (a_\nu b_\mu - a_\mu b_\nu)^2$$

e la dimostrazione è conclusa.
Osserviamo anche che l'ultima disuguaglianza è stretta, a meno che le successioni a e b siano proporzionali.
Usando la disuguaglianza di Cauchy, dimostriamo ora che per ogni $r > 0$ si ha:

$$\mathfrak{M}_r(a) \le \mathfrak{M}_{2r}(a) \tag{2}$$

Procediamo scrivendo alcune disuguaglianze equivalenti.

$$\begin{aligned} (\sum qa^r)^{\frac{1}{r}} &\le (\sum qa^{2r})^{\frac{1}{2r}} \\ (\sum qa^r)^2 &\le \sum qa^{2r} \\ \left(\sum q^{\frac{1}{2}}(q^{\frac{1}{2}}a^r)\right)^2 &\le (\sum (q^{\frac{1}{2}})^2)(\sum (q^{\frac{1}{2}}a^r)^2) \end{aligned}$$

Nell'ultima disuguaglianza si tenga presente che $\sum q = 1$.
L'ultima disuguaglianza è una conseguenza immediata della disuguaglianza di Cauchy.
Dalla dimostrazione segue che la (2) è stretta a meno che i termini di a siano tutti uguali (in tal caso, $\mathfrak{M}_r(a) = \mathfrak{G}(a)$ è tale valore comune).
Teorema della disuguaglianza aritmetico-geometrica.

Teorema 1 *Sussiste la disuguaglianza:*

$$\mathfrak{G}(a) < \mathfrak{A}(a) \quad \textit{tranne quando i termini di a sono tutti uguali}$$

Dimostrazione. Da (1) e (2) segue che:

$$\mathfrak{A}(a) = \mathfrak{M}_1(a) > \mathfrak{M}_{\frac{1}{2}}(a) > \mathfrak{M}_{\frac{1}{4}}(a) > \ldots > \mathfrak{M}_{2^{-m}}(a) > \lim_{m\to\infty} \mathfrak{M}_{2^{-m}}(a) = \mathfrak{G}(a)$$

2.3 Disuguaglianza di Hölder

Supponiamo di avere alcune n-uple di numeri reali non negativi indicate con $a, b, c, \ldots, l$. Abbiamo cioè un certo numero di colonne lunghe n:

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & l_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & \ldots & l_n \end{matrix}$$

Alle colonne $a, b, \ldots, l$ associamo pesi $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ tali che $\alpha + \beta + \cdots + \lambda = 1$. Vogliamo dimostrare che sussiste la disuguaglianza:

$$\sum a^\alpha b^\beta \cdots l^\lambda \le (\sum a)^\alpha (\sum b)^\beta \cdots (\sum l)^\lambda \tag{3}$$

cioè la somma delle medie geometriche delle componenti (righe) è maggiorata dalla media geometrica delle somme delle colonne. Scriviamola per esteso:

$$a_1^\alpha b_1^\beta \cdots l_1^\lambda + \cdots + a_n^\alpha b_n^\beta \cdots l_n^\lambda \leq (a_1 + \cdots + a_n)^\alpha (b_1 + \cdots + b_n)^\beta \cdots (l_1 + \cdots + l_n)^\lambda$$

Inoltre l'uguaglianza sussiste solo quando le colonne sono proporzionali o una di esse è nulla.

Dimostrazione. Se una colonna è nulla abbiamo 0 da ambo le parti.

Se nessuna colonna è nulla, dividendo il termine di sinistra in (3) per quello di destra, si ottiene:

$$\sum \left(\frac{a}{\sum a}\right)^\alpha \left(\frac{b}{\sum b}\right)^\beta \cdots \left(\frac{l}{\sum l}\right)^\lambda$$

che è una somma di medie geometriche: dobbiamo dimostrare che è maggiorata da 1.

La disuguaglianza aritmetico-geometrica applicata a un addendo diventa:

$$\left(\frac{a_\nu}{\sum a}\right)^\alpha \left(\frac{b_\nu}{\sum b}\right)^\beta \cdots \left(\frac{l_\nu}{\sum l}\right)^\lambda \leq \alpha \frac{a_\nu}{\sum a} + \beta \frac{b_\nu}{\sum b} + \cdots + \lambda \frac{l_\nu}{\sum l} \qquad (\star)$$

Se sommiamo tutti gli addendi otteniamo:

$$\sum \left(\frac{a}{\sum a}\right)^\alpha \left(\frac{b}{\sum b}\right)^\beta \cdots \left(\frac{l}{\sum l}\right)^\lambda \leq \sum \left(\alpha \frac{a}{\sum a} + \beta \frac{b}{\sum b} + \cdots + \lambda \frac{l}{\sum l}\right) =$$

$$= \alpha + \beta + \cdots + \lambda = 1,$$

come volevasi.

Dalla dimostrazione segue che la disuguaglianza (3) è un'uguaglianza solo quando i vari addendi di $(\star)$ sono tutti uguali, cioè:

$$\frac{a_\nu}{\sum a} = \frac{b_\nu}{\sum b} = \ldots = \frac{l_\nu}{\sum l} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

cioè se le colonne (a), (b), ... , (l) sono proporzionali.

Nel caso di due n-uple x e y, la (3) si chiama *disuguaglianza di Hölder*; in tal caso α e β sono numeri positivi con $\alpha + \beta = 1$. Essa si scrive:

$$\sum x^\alpha y^\beta \leq (\sum x)^\alpha (\sum y)^\beta \tag{4}$$

Di solito si preferisce porre $\alpha = \frac{1}{h}$ e $\beta = \frac{1}{k}$; inoltre si pone $x^\alpha = a$ e $y^\beta = b$. Otteniamo allora la scrittura usuale per la disuguaglianza di Hölder:

$$\sum ab \leq (\sum a^h)^{\frac{1}{h}} (\sum b^k)^{\frac{1}{k}} \tag{5}$$

ove h e k sono maggiori di 1 con $\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = 1$.

La disuguaglianza diventa uguaglianza solo nel caso in cui a^h e b^k sono proporzionali.

Nel caso di numeri reali o complessi la disuguaglianza di Hölder si scrive passando ai moduli:

$$|\sum_\nu a_\nu \overline{b_\nu}| \leq \sum_\nu |a_\nu \overline{b_\nu}| \leq (\sum_\nu |a_\nu|^h)^{\frac{1}{h}} (\sum_\nu |b_\nu|^k)^{\frac{1}{k}}$$

Il primo e il terzo termine diventano uguali esattamente quando arg $a_\nu \overline{b_\nu}$ non dipende da ν e $|a_\nu|^h$ e $|b_\nu|^k$ sono n-uple proporzionali.

Dalla disuguaglianza (4) si può dedurre che:

$$\text{se } 0 < r < s \text{ allora } \mathfrak{M}_r(a) < \mathfrak{M}_s(a),$$

a meno che i termini di a siano tutti uguali. La dimostrazione, non immediata, viene omessa per brevità.

2.4 Disuguaglianza di Minkowski

Se a, b, ... , l sono n-uple di numeri non negativi e $r > 1$ abbiamo la disuguaglianza di Minkowski:

$$\mathfrak{M}_r(a + b + \cdots + l) \leq \mathfrak{M}_r(a) + \mathfrak{M}_r(b) + \cdots + \mathfrak{M}_r(l) \tag{6}$$

e si ha l'uguaglianza solo quando le n-uple sono proporzionali.
Se i pesi sono tutti uguali e le n-uple sono due, la disuguaglianza di Minkowski diventa:

$$(\sum (a+b)^r)^{\frac{1}{r}} \leq (\sum a^r)^{\frac{1}{r}} + (\sum b^r)^{\frac{1}{r}} \tag{7}$$

Se, passando ai moduli, estendiamo la disuguaglianza a $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, otteniamo che la posizione

$$\|x\|_r = (\sum_\nu |x_\nu|^r)^{\frac{1}{r}}$$

definisce una norma su $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ per $r \geq 1$. Essa è detta norma di ordine r.
Per dimostrare (6) poniamo $s = a + b + \cdots + l$ e $S = \mathfrak{M}_r(s)$. Abbiamo allora:

$$\begin{aligned}
S^r &= \sum qs^r = \\
&= \sum_\nu q_\nu (a_\nu + b_\nu + \cdots + l_\nu)^r = \\
&= \sum_\nu q_\nu (a_\nu + b_\nu + \cdots + l_\nu)(a_\nu + b_\nu + \cdots + l_\nu)^{r-1} = \\
&= \sum_\nu q_\nu a_\nu (a_\nu + b_\nu + \cdots + l_\nu)^{r-1} + \cdots + \sum_\nu q_\nu l_\nu (a_\nu + b_\nu + \cdots + l_\nu)^{r-1} = \\
&= \sum qas^{r-1} + \sum qbs^{r-1} + \cdots + \sum qls^{r-1} = \\
&= \sum (q^{\frac{1}{r}} a)(q^{\frac{1}{r}} s)^{r-1} + \sum (q^{\frac{1}{r}} b)(q^{\frac{1}{r}} s)^{r-1} + \cdots + \sum (q^{\frac{1}{r}} l)(q^{\frac{1}{r}} s)^{r-1}
\end{aligned}$$

Poiché $r > 1$, applichiamo a ogni addendo la (5) con $r = h$ e $r' = k$ in modo che $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ cioè $r + r' = rr'$. Per il primo addendo si ha dunque:

$$\sum (q^{\frac{1}{r}} a)(q^{\frac{1}{r}} s)^{r-1} \leq (\sum qa^r)^{\frac{1}{r}} (\sum (q^{\frac{1}{r}} s)^{(r-1)r'})^{\frac{1}{r'}}$$

Poiché $(r-1)r' = r$, il secondo termine diventa:

$$(\sum qa^r)^{\frac{1}{r}} (\sum qs^r)^{\frac{1}{r'}}$$

Sommando tutti gli addendi otteniamo:

$$S^r \leq \left((\sum qa^r)^{\frac{1}{r}} + \cdots + (\sum ql^r)^{\frac{1}{r}} \right) (\sum qs^r)^{\frac{1}{r'}}$$

che possiamo scrivere:

$$S^r \leq (\mathfrak{M}_r(a) + \mathfrak{M}_r(b) + \cdots + \mathfrak{M}_r(l)) (\sum qs^r)^{\frac{1}{r'}}$$

Ora, poiché $S = (\sum qs^r)^{\frac{1}{r}}$, si ha:

$$S^{r-1} = (\sum qs^r)^{\frac{r-1}{r}} = (\sum qs^r)^{\frac{1}{r'}}$$

Sostituendo nella precedente disuguaglianza abbiamo:

$$S^r \leq (\mathfrak{M}_r(a) + \mathfrak{M}_r(b) + \cdots + \mathfrak{M}_r(l))S^{r-1}$$

Semplificando otteniamo quanto voluto (se S è nullo, tutte le n-uple devono essere nulle). Con una piccola meditazione si può vedere che la disuguaglianza di Minkowski è un'uguaglianza se e solo se tutte le n-uple sono in proporzione con la n-upla s.

Esercizio. Rifare la dimostrazione nel caso più semplice della disuguaglianza (7).

2.5 Disuguaglianza di Jénsen

Se $0 < r < s$, abbiamo osservato che $\mathfrak{M}_r(a) < \mathfrak{M}_s(a)$. È interessante osservare che per la norma di ordine r le disuguaglianze si invertono. Si ha infatti la disuguaglianza di Jénsen per le n-uple a termini non negativi:

$$\text{se} \quad 0 < r < s \quad \text{allora} \quad (\sum a^s)^{\frac{1}{s}} \leq (\sum a^r)^{\frac{1}{r}} \tag{8}$$

Osserviamo che entrambi i termini della disuguaglianza sono funzioni di a positivamente omogenee di grado 1, cioè:

$$t(\sum a^s)^{\frac{1}{s}} = (\sum (ta)^s)^{\frac{1}{s}}$$

Moltiplicando ambo i termini per $t = (\sum a^r)^{-\frac{1}{r}}$, dobbiamo allora dimostrare che:

$$(\sum (ta)^s)^{\frac{1}{s}} \leq 1$$

Osserviamo che:

$$(ta_\nu)^s = \frac{a_\nu^s}{(\sum a^r)^{\frac{s}{r}}} = (\frac{a_\nu^r}{\sum a^r})^{\frac{s}{r}}$$

Poiché $\frac{s}{r} > 1$ si ha

$$(ta_\nu)^s = (\frac{a_\nu^r}{\sum a^r})^{\frac{s}{r}} \leq \frac{a_\nu^r}{\sum a^r}$$

da cui:

$$\sum_\nu (ta_\nu)^s \leq \sum_\nu \frac{a_\nu^r}{\sum a^r} = 1$$

In conclusione:

$$(\sum (ta)^s)^{\frac{1}{s}} \leq 1,$$

come volevasi.
Dalla dimostrazione segue che se a ha almeno due termini non nulli allora almeno uno dei quozienti usati è minore di 1 e la disuguaglianza è stretta.

3 Serie infinite

Non faremo una trattazione delle precedenti disuguaglianze per le serie infinite. Osserviamo solo che se abbiamo successioni di numeri non negativi allora la disuguaglianza di Hölder (5), la disuguaglianza di Minkowski (7) e la disuguaglianza di Jénse (8) sussistono come disuguaglianze larghe, osservando che sono vere per le ridotte e passando poi all'estremo superiore. In tal caso esse dicono anche che se le serie che compaiono nei termini di destra sono convergenti, anche le serie che compaiono nei termini di sinistra sono convergenti.
Passando ai moduli otteniamo anche le disuguaglianze scritte nella premessa. In tal caso si tenga presente che la convergenza assoluta implica anche la convergenza semplice.
Con un piccolo conto è facile vedere che le disuguaglianze di Hölder e Minkowski diventano uguaglianze se sono soddisfatte le condizioni scritte nella premessa. Si può dimostrare, ma non lo faremo, che l'uguaglianza sussiste solo con queste condizioni.

4 Integrali

Per i concetti di insieme misurabile e di funzione misurabile e per le considerazioni di sommabilità si rimanda ai corsi di Analisi.
I nostri integrali sono intesi come integrali di funzioni misurabili su insiemi misurabili.
Come per le n-uple, qui supponiamo che le funzioni in gioco siano **non negative**; le disuguaglianze della premessa si otterranno passando ai moduli (si ricordi che se l'integrale del modulo è finito allora la funzione è sommabile).

4.1 Disuguaglianza di Schwarz

L'analogo della disuguaglianza di Cauchy si chiama per gli integrali *disuguaglianza di Schwarz*. Scriviamola:

$$(\int f(x)g(x)\,dx)^2 \leq \int f^2(x)dx \int g^2(x)dx \tag{9}$$

Per la dimostrazione si osservi che:

$$\begin{aligned}
& \int f^2(x)dx \int g^2(x)dx - (\int f(x)g(x)dx)^2 = \\
= \ & \int f^2(x)dx \int g^2(y)dy - \int f(x)g(x)dx \int f(y)g(y)dy = \\
= \ & \frac{1}{2}\int f^2(x)dx \int g^2(y)dy + \frac{1}{2}\int g^2(x)dx \int f^2(y)dy - \int f(x)g(x)dx \int f(y)g(y)dy = \\
= \ & \frac{1}{2}\int\int \big(f(x)g(y) - g(x)f(y)\big)^2 dx\,dy \geq 0
\end{aligned}$$

4.2 Disuguaglianza di Hölder

La disuguaglianza (3) per gli integrali diventa:

se α, β, ... , λ sono positivi e $\alpha + \beta + \cdots + \lambda = 1$ allora:

$$\int f^\alpha g^\beta \cdots l^\lambda dx \leq (\int f\,dx)^\alpha (\int g\,dx)^\beta \cdots (\int l\,dx)^\lambda \tag{10}$$

Per la dimostrazione scriviamo il rapporto che si ottiene dividendo per il secondo termine:

$$\begin{aligned} & \frac{\int f^\alpha g^\beta \cdots l^\lambda dx}{\int f\,dx)^\alpha(\int g\,dx)^\beta \cdots (\int l\,dx)^\lambda} = \\ = \; & \int \left(\frac{f}{\int f\,dx}\right)^\alpha \left(\frac{g}{\int g\,dx}\right)^\beta \cdots \left(\frac{l}{\int l\,dx}\right)^\lambda \le \\ \le \; & \int \left(\frac{\alpha f}{\int f\,dx} + \frac{\beta g}{\int g\,dx} + \cdots + \frac{\lambda l}{\int l\,dx}\right) dx = \\ = \; & \alpha + \beta + \cdots + \lambda = 1 \end{aligned}$$

ove l'ultima disuguaglianza segue dall'isotonia dell'integrale applicata alla disuguaglianza aritmetico-geometrica.
Si potrebbe dimostrare che l'uguaglianza sussiste se e solo se le funzioni in gioco sono proporzionali oppure una di esse è nulla (si intende, quasi ovunque).
La scrittura standard della disuguaglianza (5) per gli integrali diventa:

$$\int fg\,dx \le (\int f^p dx)^{\frac{1}{p}} (\int g^q dx)^{\frac{1}{q}} \tag{11}$$

ove p e q sono maggiori di 1, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. I numeri p e q si chiamano *esponenti coniugati.* Per funzioni non nulle l'uguaglianza sussiste quando f^p e g^q sono proporzionali.

4.3 Disuguaglianza di Minkowski

Scriveremo la disuguaglianza di Minkowski per gli integrali solo nel forma corrispondente alla (7):

$$\text{se } p > 1 \quad \text{allora} \quad (\int (f+g)^p dx)^{\frac{1}{p}} \le (\int f^p dx)^{\frac{1}{p}} + (\int g^p dx)^{\frac{1}{p}} \tag{12}$$

Analogamente a quanto fatto per le n-uple, poniamo $S = (\int (f+g)^p dx)^{\frac{1}{p}}$. Nelle seguenti disuguaglianze applichiamo la disuguaglianza di Hölder con q esponente coniugato di p:

$$\begin{aligned} S^p &= \int (f+g)^p dx = \\ &= \int (f+g)(f+g)^{p-1} dx = \\ &= \int f(f+g)^{p-1} dx + \int g(f+g)^{p-1} dx \le \\ &\le (\int f^p dx)^{\frac{1}{p}} (\int (f+g)^{(p-1)q} dx)^{\frac{1}{q}} + (\int g^p dx)^{\frac{1}{p}} (\int (f+g)^{(p-1)q} dx)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \left((\int f^p dx)^{\frac{1}{p}} + (\int g^p dx)^{\frac{1}{p}}\right)\left((\int (f+g)^p dx)^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

(Abbiamo usato che $(p-1)q = p$ e $\frac{p}{q} = p - 1$.)
Poiché il secondo fattore è $S^{\frac{p}{q}} = S^{p-1}$, un'immediata semplificazione porta alla conclusione.
Per funzioni di segno qualsiasi si potrebbe dimostrare che si ha l'uguaglianza esattamente quando una delle due funzioni è multiplo positivo dell'altra ($p > 1$).

5 Norme p su $\mathbb{K}^n$

Sia $\mathbb{K}$ il corpo reale o complesso e sia $p \geq 1$ un numero reale.
Sia $x \in \mathbb{K}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. La posizione

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{13}$$

definisce una norma su $\mathbb{K}^n$ perché la disuguaglianza triangolare è assicurata dalla disuguaglianza di Minkowski.
Se $p = \infty$ anche

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \tag{14}$$

definisce una norma su $\mathbb{K}^n$.
Per $p = 2$ la norma è indotta dal prodotto scalare (v. [GDM]):

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$$

nel senso che $\|x\|_2 = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$.
Si osservi che la disuguaglianza di Cauchy in $\mathbb{R}^n$ dice che il modulo del prodotto scalare di due vettori è minore o uguale del prodotto delle lunghezze e vale l'uguaglianza quando i due vettori sono uno multiplo dell'altro (chiamiamo *coseno di due vettori* il rapporto fra il prodotto scalare e il prodotto delle lunghezze).
Poiché siamo in dimensione finita, tutte queste norme sono equivalenti.
Indichiamo con $l^p(n)$ lo spazio $\mathbb{R}^n$ con la norma-p.

Esercizio. Disegnare la palla unitaria di $\mathbb{R}^2$ in $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_p$ con $1 < p < 2$ e $2 < p < \infty$ (riflettere sulla disuguaglianza di Jénsen).

La disuguaglianza di Jénsen ci dice che se $1 \leq p < q$ allora $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ e la disuguaglianza è stretta se x ha almeno due coordinate non nulle. Di conseguenza la l^p-palla unitaria è strettamente contenuta nella l^q- palla unitaria.
Fissato x, la funzione $\|x\|_p$ è continua e decrescente in p; mostriamo che:

$$\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$$

È immediato verificare la seguente disuguaglianza:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$$

da cui segue quanto voluto.

Esercizio. Sia $1 < p < \infty$. Dimostrare che la palla unitaria in $l^p(n)$ è strettamente convessa, cioè che il segmento congiungente due punti della frontiera è tutto contenuto nella palla aperta, tranne gli estremi.