

EQUAZIONI LINEARI DEL SECONDO ORDINE

Umberto Marconi

Dipartimento di Matematica – Università di Padova

1 Considerazioni generali

Nel seguito le funzioni sono continue (e derivabili quanto basta) su un intervallo J della retta reale e a valori nel corpo reale oppure nel corpo complesso; la variabile indipendente è indicata con x e la variabile dipendente è indicata con y .

Per *equazione lineare del secondo ordine* si intende un'equazione del tipo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x)$$

o, con scrittura più semplice:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \quad (1)$$

Se indichiamo con $D : C^1(J) \rightarrow C^0(J)$ l'operatore di derivazione e con $D^2 = D \circ D : C^2(J) \rightarrow C^0(J)$ l'operatore derivata seconda, l'equazione (1) può scriversi nella forma:

$$D^2y + P(x)Dy + Q(x)y = R(x)$$

L'applicazione $L : C^2(J) \rightarrow C^0(J)$ definita da $L = D^2 + P(x)D + Q(x)$ è lineare e l'equazione (1) si può scrivere nella forma:

$$L(y) = R$$

Risolvere l'equazione (1) significa trovare la classe laterale $L^{-1}(R)$.

Sappiamo che se $y_p \in L^{-1}(R)$ allora l'insieme delle soluzioni è dato da:

$$L^{-1}(R) = y_p + \text{Ker } L$$

Gli elementi di $\text{Ker } L$ sono le soluzioni dell'equazione *omogenea* $L(y) = \vec{0}$, cioè:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = \vec{0} \quad (2)$$

L'equazione (1) si dice *non omogenea*.

Concludendo:

Proposizione 1 • Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono soluzioni dell'equazione omogenea (2), allora ogni loro combinazione lineare $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ è soluzione dell'equazione omogenea (perché $\text{Ker } L$ è sottospazio vettoriale).

- Se $y_g(x)$, al variare di certi parametri, descrive l'integrale generale dell'equazione omogenea (cioè tutto $\text{Ker } L$) e $y_p(x)$ è una data soluzione particolare dell'equazione non omogenea, allora:

$$y_g(x) + y_p(x)$$

descrive tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea (perché $y_p(x) + y_g(x) = y_p + \text{Ker } L$).

Dimostreremo più avanti il seguente teorema di esistenza e unicità:

Teorema 2 Se $x_0 \in J$ e y_0 e y'_0 sono numeri arbitrari, esiste una e una sola soluzione definita su tutto J che risolve il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} L(y) = R \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

cioè esiste una e una sola soluzione che soddisfa le condizioni iniziali.

2 Equazione omogenea

Occupiamoci anzitutto di (2). Il problema di Cauchy per l'equazione omogenea si scrive:

$$\begin{cases} L(y) = \vec{0} \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

L'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker } L & \xrightarrow{T} & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \\ y & \mapsto & (y(x_0), y'(x_0)) \end{array}$$

è lineare perché composta dalle applicazioni lineari $y \mapsto (y, y') \mapsto \delta_{x_0}(y, y')$. Essa è iniettiva perché $\text{Ker } T$ è costituito dalle soluzioni del problema:

$$\begin{cases} L(y) = \vec{0} \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

e siccome $y = \vec{0}$ è soluzione del problema, l'unicità assicura che $\text{Ker } T = \langle \vec{0} \rangle$.

L'applicazione lineare T è anche suriettiva perché il teorema di esistenza e unicità assicura che esiste la soluzione che assume la coppia di valori (y_0, y'_0) arbitrariamente scelta.

Dunque $\text{Ker } L$ ha dimensione 2 su \mathbb{K} perché isomorfo a $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$; scelte due soluzioni linearmente indipendenti y_1 e y_2 in $\text{Ker } L$, ogni altra soluzione sarà loro combinazione lineare. Ricordiamo che linearmente indipendenti significa che se $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$ per ogni $x \in J$ allora $c_1 = c_2 = 0$.

Riassumendo:

Teorema 3 Esistono due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea $L(y) = \vec{0}$. Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono linearmente indipendenti, allora l'integrale generale (cioè l'insieme delle soluzioni) dell'equazione omogenea è costituito da tutte e sole le funzioni:

$$y_g(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

al variare delle costanti c_1 e c_2 .

Supponiamo ora di avere assegnate due soluzioni linearmente indipendenti $y_1(x)$ e $y_2(x)$ e di prendere una terza soluzione $y(x)$ (sempre dell'equazione omogenea (2)). Questa terza soluzione dipenderà unicamente dalle condizioni iniziali y_0 e y'_0 . Dovranno *esistere* uniche costanti c_1, c_2 (dipendenti da $y(x)$ cioè da y_0 e y'_0) tali che:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) & \forall x \in J \\ y'(x) &= c_1 y'_1(x) + c_2 y'_2(x) & \forall x \in J \end{aligned}$$

ove la seconda riga si è ottenuta derivando la prima. Se valutiamo in $x_0 \in J$ abbiamo:

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y(x_0) = y_0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

Questo sistema lineare nelle incognite c_1, c_2 deve avere soluzione comunque scelta la colonna dei valori iniziali $\begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$. Poiché un'applicazione lineare suriettiva da \mathbb{K}^2 a \mathbb{K}^2 è anche iniettiva, si dovrà avere che il determinante (detto *wronskiano* della coppia di soluzioni)

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0)$$

deve essere diverso da zero (la matrice si chiama matrice wronskiana).

Si osservi che, data l'arbitrarietà di x_0 , se y_1 e y_2 sono soluzioni linearmente indipendenti dell'omogenea allora $W(x) \neq 0$ per ogni x . Se invece le due soluzioni sono linearmente dipendenti allora le colonne della matrice wronskiana sono linearmente dipendenti per ogni x e quindi $W(x)$ è 0 in ogni punto.

Date due soluzioni y_1 e y_2 dell'omogenea (2) (dipendenti o indipendenti), siamo condotti a definire il loro wronskiano (funzione della variabile x):

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \quad (3)$$

Le considerazioni precedenti conducono alla seguente:

Proposizione 4 *Siano y_1, y_2 soluzioni dell'equazione omogenea $L(y) = \vec{0}$ e sia $W(y_1, y_2)$ il loro wronskiano (naturalmente funzione della variabile x). Sono equivalenti:*

- i) y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti.
- ii) $W(y_1, y_2) \neq 0$ in ogni punto x .
- iii) $W(y_1, y_2) \neq \vec{0}$.

Proposizione 5 *Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono soluzioni dell'equazione omogenea definite sull'intervallo J e $W(x)$ è il loro wronskiano allora, scelto $x_0 \in J$, si ha:*

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^x P(\xi) d\xi\right) \quad (4)$$

Dimostrazione. Derivando $W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$ otteniamo:

$$\frac{dW}{dx} = W' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

Poiché y_1 e y_2 sono soluzioni di (2) si ha:

$$\begin{aligned} y_1'' + P y_1' + Q y_1 &= \vec{0} \\ y_2'' + P y_2' + Q y_2 &= \vec{0} \end{aligned}$$

Moltiplicando la prima equazione per y_2 e la seconda per y_1 e sottraendo la prima dalla seconda otteniamo:

$$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' + P(y_1 y_2' - y_2 y_1') = \vec{0}$$

ovvero:

$$\frac{dW}{dx} + P W = \vec{0}$$

Moltiplicando per $\exp(\int_{x_0}^x P(\xi)d\xi)$ otteniamo:

$$\frac{d}{dx}(W(x) \exp(\int_{x_0}^x P(\xi)d\xi)) = \vec{0}$$

e integrando:

$$W(x) = W(x_0) \exp(-\int_{x_0}^x P(\xi)d\xi)$$

da cui si deduce ancora una volta che se $W(x)$ è nullo in un punto allora è identicamente nullo.

Esercizio 1 Mostrare che $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ è soluzione generale su tutto \mathbb{R} dell'equazione $y'' + y = 0$. Spiegare perché il wronskiano è costante. Trovare la soluzione particolare che soddisfa le condizioni $y(0) = 2$ e $y'(0) = 3$.

Esercizio 2 Sulla semiretta dei reali positivi, trovare ad occhio due soluzioni linearmente indipendenti $y_1(x)$ dell'equazione differenziale:

$$x^2 y'' - 2y = 0$$

Trovare poi la soluzione particolare che soddisfa le condizioni iniziali $y(1) = 1$ e $y'(1) = 8$.

Esercizio 3 Sulla semiretta dei reali maggiori di 1 trovare ad occhio una soluzione y_1 dell'equazione differenziale:

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0$$

Trovare una soluzione linearmente indipendente della forma $y_2 = v y_1$ per un'opportuna funzione v da determinarsi.

2.1 Equazione omogenea a coefficienti costanti

Se $P(x) = p$ e $Q(x) = q$ sono costanti su tutto J l'equazione (2) diventa:

$$y'' + py' + qy = \vec{0} \tag{5}$$

ovvero:

$$D^2 y + pDy + qy = \vec{0}$$

Se α e β sono le radici dell'equazione caratteristica $m^2 + pm + q = 0$ allora si ha:

$$m^2 + pm + q = (m - \alpha)(m - \beta)$$

Date le regole di composizione degli operatori $D - \alpha$ e $D - \beta$ si ottiene che l'equazione (5) si può scrivere nella forma:

$$(D - \alpha) \circ (D - \beta)y = \vec{0}$$

ovvero:

$$(D - \alpha)(y' - \beta y) = \vec{0}$$

Posto

$$z = y' - \beta y \tag{6}$$

otteniamo:

$$(D - \alpha)z = \vec{0}$$

ovvero:

$$z' - \alpha z = \vec{0}$$

la cui soluzione generale è $z = k_1 e^{\alpha x}$ al variare del numero k_1 . Se sostituiamo tale valore z in (6) abbiamo l'equazione:

$$y' - \beta y = k_1 e^{\alpha x}$$

Moltiplicando ambo i membri per $e^{-\beta x}$ si ha:

$$(e^{-\beta x} y)' = k_1 e^{(\alpha-\beta)x} \quad (7)$$

Caso $\alpha \neq \beta$. Integrando ambo i membri di (7) si ottiene:

$$e^{-\beta x} y(x) = \frac{k_1}{\alpha - \beta} e^{(\alpha-\beta)x} + c_2$$

Posto $c_1 = \frac{k_1}{\alpha-\beta}$, moltiplicando per $e^{\beta x}$ si ottiene l'integrale generale:

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x}$$

Si osservi che:

$$W(e^{\alpha x}, e^{\beta x}) = (\beta - \alpha) e^{(\alpha+\beta)x} = (\beta - \alpha) e^{-px} \quad (8)$$

in accordo con (4). Se vogliamo trovare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y'_0$, ci conviene scrivere l'integrale generale sotto la forma:

$$y(x) = c_1 e^{\alpha(x-x_0)} + c_2 e^{\beta(x-x_0)}$$

Imponendo le condizioni iniziali e facendo qualche facile conto si ottiene:

$$y(x) = \frac{\beta y_0 - y'_0}{\beta - \alpha} e^{\alpha(x-x_0)} + \frac{y'_0 - \alpha y_0}{\beta - \alpha} e^{\beta(x-x_0)}$$

Caso $\alpha = \beta$. L'equazione (7) diventa:

$$(e^{-\alpha x} y)' = k_1$$

da cui integrando e ponendo $c_2 = k_1$:

$$e^{-\alpha x} y = c_2 x + c_1$$

In tal caso l'integrale generale diventa:

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 x e^{\alpha x}$$

Osserviamo che si ha:

$$W(e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}) = e^{2\alpha x} = e^{-px} \quad (9)$$

in accordo con (4). Se cerchiamo la soluzione particolare che soddisfa le condizioni iniziali $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y'_0$, procedendo con facili conti si ottiene:

$$y(x) = y_0 e^{\alpha(x-x_0)} + (y'_0 - \alpha y_0)(x - x_0) e^{\alpha(x-x_0)}$$

Esercizi. Dal testo [DM] svolgere 20.6.1, 20.6.2, 20.6.3, 20.6.4, 20.6.5, 20.6.6, 20.6.7.

3 Equazione non omogenea

Se l'equazione omogenea è a coefficienti costanti e il termine $R(x)$ è un *quasi polinomio*, l'equazione non omogenea

$$y'' + py' + qy = a(x)e^{\gamma x}$$

si può risolvere usando il metodo dei coefficienti indeterminati illustrato in [DM, 20.7.1].

Esercizio 4 Svolgere gli esercizi proposti o svolti in [DM] dopo 20.7.1.

Se l'equazione omogenea non è a coefficienti costanti, è impossibile trovare un metodo per determinare due soluzioni linearmente indipendenti. Se però conosciamo due soluzioni linearmente indipendenti y_1 e y_2 dell'equazione (2) esiste un metodo, dovuto a Lagrange, per determinare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea (1).

3.1 Il metodo della variazione dei parametri

Vogliamo determinare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea (1):

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

conoscendo due soluzioni linearmente indipendenti $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dell'equazione omogenea (2).

Sappiamo che una qualsiasi soluzione dell'equazione omogenea è del tipo $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$. Assumiamo che sia possibile scrivere nello stesso modo una soluzione della non omogenea, ove però questa volta c_1 e c_2 sono *parametri variabili*. Cercheremo c_1 e c_2 in modo che $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ (senza questa condizione le funzioni c_1 e c_2 sono definite a meno di costanti additive). Da

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \tag{10}$$

derivando otteniamo:

$$y' = (c_1y_1' + c_2y_2') + (c_1'y_1 + c_2'y_2)$$

Vedremo¹ che è possibile determinare c_1 e c_2 in modo che la seconda parentesi sia $\vec{0}$, cioè:

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = \vec{0} \tag{11}$$

Se è così, per y' otteniamo:

$$y' = c_1y_1' + c_2y_2' \tag{12}$$

Si osservi che se determiniamo c_1 e c_2 in modo che valgano 0 in x_0 , da (10) e (12) si ottiene che $y(x_0) = y'(x_0) = 0$.

Derivando (12) otteniamo:

$$y'' = c_1y_1'' + c_1'y_1' + c_2y_2'' + c_2'y_2'$$

Sostituendo nell'equazione (2) si ha:

$$c_1(y_1'' + Py_1' + Qy_1) + c_2(y_2'' + Py_2' + Qy_2) + c_1'y_1' + c_2'y_2' = R(x)$$

ove a sinistra è sottintesa la variabile indipendente. Se teniamo conto che y_1 e y_2 sono soluzioni dell'equazione omogenea, otteniamo:

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = R(x) \tag{13}$$

Mettendo insieme (11) e (13) siamo condotti a risolvere il sistema nelle incognite c_1' e c_2' :

$$\begin{cases} y_1c_1' + y_2c_2' = \vec{0} \\ y_1'y_1 + y_2'y_2 = R(x) \end{cases}$$

Poiché y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti, il loro wronskiano $W(y_1, y_2)$ è diverso da 0 per ogni valore di x e quindi il sistema ammette una e una sola soluzione che è data dalla regola di Cramer:

$$c_1' = -y_2W^{-1}(y_1, y_2)R(x), \quad c_2' = y_1W^{-1}(y_1, y_2)R(x)$$

ove naturalmente y_1 , y_2 e $W(y_1, y_2)$ sono funzioni della variabile x .

Si osservi che $W^{-1}(y_1, y_2)$, il reciproco del determinante wronskiano, è anche il determinante dell'inversa della matrice wronskiana.

Ricordando che cerchiamo c_1 e c_2 in modo che valgano 0 in x_0 , si ha:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int_{x_0}^x -y_2(\xi)W^{-1}(y_1(\xi), y_2(\xi))R(\xi) d\xi \\ c_2(x) &= \int_{x_0}^x y_1(\xi)W^{-1}(y_1(\xi), y_2(\xi))R(\xi) d\xi \end{aligned} \tag{14}$$

¹ Spiegheremo più avanti perché questo non succede per caso.

Sostituendo in (10) otteniamo la soluzione della non omogenea che vale 0 in x_0 con la sua derivata prima:

$$y(x) = y_1(x) \int_{x_0}^x -y_2(\xi)W^{-1}(y_1(\xi), y_2(\xi))R(\xi) d\xi + y_2(x) \int_{x_0}^x y_1(\xi)W^{-1}(y_1(\xi), y_2(\xi))R(\xi) d\xi$$

Abbiamo così dimostrato la seguente:

Proposizione 6 *Data l'equazione non omogenea (1), se y_1 e y_2 sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'omogenea associata (2), la soluzione $y(x)$ della non omogenea che soddisfa le condizioni iniziali $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ è data dalla formula:*

$$y(x) = \int_{x_0}^x (-y_1(x)y_2(\xi) + y_2(x)y_1(\xi))W^{-1}(y_1(\xi), y_2(\xi))R(\xi) d\xi$$

ovvero, usando (4):

$$y(x) = \int_{x_0}^x (-y_1(x)y_2(\xi) + y_2(x)y_1(\xi))W^{-1}(y_1(x_0), y_2(x_0))e^{\int_{x_0}^{\xi} P(\eta) d\eta} R(\xi) d\xi \quad (15)$$

Negli esercizi la cosa più comoda è ricavare $c_1(x)$ e $c_2(x)$ da (14), con l'integrale indefinito se non si richiedono condizioni iniziali, e poi scrivere la combinazione:

$$y(x) = y_1(x)c_1(x) + y_2(x)c_2(x).$$

Esercizio 5 Trovare una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}$$

Esercizio 6 Trovare una soluzione particolare di ognuna delle seguenti equazioni:

$$\begin{array}{ll} y'' + 4y = \tan 2x & y'' + 2y' + y = e^{-x} \log x \\ y'' - 3y' + 2y = (1 + e^{-x})^{-1} & y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sec 2x \end{array}$$

3.2 Il nucleo risolvete

Nel caso dell'equazione a coefficienti costanti l'espressione (15) si può scrivere anche in altro modo. Si ha dunque:

$$y'' + py' + qy = R(x) \quad (16)$$

un'equazione a coefficienti costanti e siano α e β le radici dell'equazione caratteristica.

Caso $\alpha \neq \beta$. Due soluzioni linearmente indipendenti dell'omogenea sono $e^{\alpha x}$ e $e^{\beta x}$ e per (8) il loro wronskiano è $W(x) = (\beta - \alpha)e^{-px} = (\beta - \alpha)e^{(\alpha+\beta)x}$. Sostituendo in (15) otteniamo la soluzione di (16) che vale 0 in x_0 con la sua derivata prima:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_{x_0}^x (-e^{\beta\xi}e^{\alpha x} + e^{\alpha\xi}e^{\beta x}) \frac{1}{\beta - \alpha} e^{-(\alpha+\beta)\xi} R(\xi) d\xi = \\ &= \int_{x_0}^x \frac{1}{\beta - \alpha} (e^{\beta(x-\xi)} - e^{\alpha(x-\xi)}) R(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Posto

$$\eta(t) = \frac{1}{\beta - \alpha} (e^{\beta t} - e^{\alpha t})$$

la soluzione trovata si scrive:

$$y(x) = \int_{x_0}^x \eta(x - \xi) R(\xi) d\xi$$

Il modo più comodo per determinare η è osservare che essa è la soluzione dell'omogenea che soddisfa la condizione iniziale $\begin{pmatrix} \eta(0) \\ \eta'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Caso $\alpha = \beta$. Due soluzioni linearmente indipendenti dell'omogenea sono $e^{\alpha x}$ e $x e^{\alpha x}$ e per (9) il loro wronskiano è $W(x) = e^{-px} = e^{2\alpha x}$. Sostituendo in (15) otteniamo la soluzione di (16) che vale 0 in x_0 con la sua derivata prima:

$$y(x) = \int_{x_0}^x (-\xi e^{\alpha\xi} e^{\alpha x} + e^{\alpha\xi} x e^{\alpha x}) e^{-2\alpha\xi} R(\xi) d\xi = \int_{x_0}^x (x - \xi) e^{\alpha(x-\xi)} R(\xi) d\xi$$

Posto:

$$\eta(t) = t e^{\alpha t}$$

abbiamo ancora una volta:

$$y(x) = \int_{x_0}^x \eta(x - \xi) R(\xi) d\xi$$

Si osservi che $\eta(t)$ è la soluzione dell'equazione omogenea per cui $\begin{pmatrix} \eta(0) \\ \eta'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Riassumendo:

Proposizione 7 *Data l'equazione a coefficienti costanti*

$$y'' + py' + qy = R(x)$$

detta η la soluzione dell'omogenea associata per cui $\begin{pmatrix} \eta(0) \\ \eta'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, la soluzione $y(x)$ della non omogenea (16) che soddisfa le condizioni $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ è data dalla formula:

$$y(x) = \int_{x_0}^x \eta(x - \xi) R(\xi) d\xi$$

Esercizio 7 Svolgere gli esercizi (5) e (6) di pag. 7 usando il nucleo risolvete η .

Esercizio 8 Siano J un intervallo della retta reale, x_0 un punto di J e y_0, y'_0 numeri assegnati. Si consideri il sottoinsieme E di $C^2(J)$ costituito dalle funzioni y tali che $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y'_0$.

Il sottoinsieme E è una classe laterale modulo un sottospazio. Quale?

Fissate due costanti p e q , si consideri l'operatore $L : E \rightarrow C^0(J)$ così definito:

$$L = D^2 + pD + q\text{Id}$$

Dimostrare che L è biiettivo e determinare una formula per L^{-1} .

Esercizio 9 Sia Y il sottospazio vettoriale di $C[a, b]$ costituito da quelle funzioni y che hanno derivata prima e seconda continue su $[a, b]$ e tali che $y(a) = y(b) = 0$.

Dimostrare che $D^2 : Y \rightarrow C[a, b]$ è iniettivo e suriettivo.

Esercizio 10 Sia Y il sottospazio vettoriale di $C[0, \pi]$ costituito dalle funzioni y che hanno derivata prima e seconda continue e tali che $y(0) = y(\pi) = 0$. Fissato un parametro complesso ω , si consideri l'operatore $L : Y \rightarrow C[0, \pi]$ definito da $L = -D^2 + \omega^2 \text{Id}$. Dimostrare che se $\sinh \pi\omega \neq 0$ allora l'operatore L è iniettivo e suriettivo e si può scrivere una formula per l'inversa.

Esercizio 11 Risolvere le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} y' + \frac{1}{x}y &= 3x \\ y' + y &= 2xe^{-x} + x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' + y &= \frac{1}{1+e^{2x}} \\ y' + y \cotan x &= \frac{2x}{\sin x} \end{aligned}$$

Esercizio 12 Mostrare che $y = c_1x + c_2x^2$ è la soluzione generale dell'equazione:

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$$

su ogni intervallo che non contiene 0 e trovare la soluzione particolare per cui $y(1) = 3$ e $y'(1) = 5$.

Esercizio 13 Considerare le due funzioni $y_1(x) = x^3$ e $y_2(x) = x^2|x|$ sull'intervallo $[-1, 1]$.

- Mostrare che il loro wronskiano $W(y_1, y_2)$ si annulla identicamente.
- Mostrare che y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti.
- Perché non c'è contraddizione?

Esercizio 14 Risolvere le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}y'' + 4y &= 3 \sin x \\y'' + y' &= 10x^4 + 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y'' - 2y' + 2y &= e^x \sin x \\y'' - 3y' + 2y &= 14 \sin 2x - 18 \cos 2x\end{aligned}$$

BIBLIOGRAFIA

[DM] Giuseppe De Marco, *Analisi Uno*, Decibel-Zanichelli.