

Analisi Matematica 2 per Matematica

Esercizi prima settimana

1. Esercizio. Sia (X, d) uno spazio metrico. Ricordare che:

- Se $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ è una successione di punti di X e $p \in X$, allora:

$$\lim_j x_j = p \iff \lim_j d(x_j, p) = 0$$

- Se $E \subseteq X$ e $p \in X$ allora:

$$p \in \overline{E} \iff \exists (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \text{ con } x_j \in E \forall j \text{ tale che } \lim_j x_j = p$$

- Un sottoinsieme E di X è chiuso se e solo se contiene i limiti delle sue successioni convergenti in X .
- Se (Y, ρ) è un altro spazio metrico e $f : X \rightarrow Y$ è una funzione, allora f è continua in un punto $p \in X$ se e solo se $\lim_j f(x_j) = f(p)$ ogni qualvolta $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ è una successione di punti di X convergente a p , ovvero:

$$\lim_j d(x_j, p) = 0 \Rightarrow \lim_j \rho(f(x_j), f(p)) = 0$$

2. Esercizio. Siano d e ρ due metriche su un insieme X . Le metriche d e ρ si dicono lip-equivalenti se esistono costanti reali strettamente positive α, β tali che:

$$\alpha d \leq \rho \leq \beta d$$

ovvero:

$$\alpha d(x, y) \leq \rho(x, y) \leq \beta d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Dimostrare che se d e ρ sono lip-equivalenti allora inducono la stessa topologia e le stesse successioni di Cauchy.

Ricordare che in \mathbb{R}^n le metriche d_2, d_∞, d_1 sono lip-equivalenti e quindi la topologia euclidea (indotta da d_2) coincide con la topologia prodotto (indotta da d_∞).

3. Esercizio. Siano $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$ e $(q_j)_{j \in \mathbb{N}}$ due successioni di Cauchy di uno spazio metrico (X, d) . Dimostrare che $\lim_j d(p_j, q_j)$ esiste in \mathbb{R} .

4. Esercizio. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una successione convergente a un punto $x \in X$. Dimostrare che l'insieme $C = \{x_j : j \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ è chiuso.

5. Esercizio. Sia (X, d) uno spazio metrico e siano $p \in X, A \subseteq X$. Dimostrare che p è di accumulazione per A se e solo se esiste una successione iniettiva di punti di A convergente a p .

Dimostrare poi che $\text{diam } A = \text{diam } \overline{A}$.

6. Esercizio. Dimostrare che un sottoinsieme di uno spazio metrico è limitato (cioè ha diametro finito) se e solo se è contenuto in una palla.

7. Esercizio. Sia D un sottoinsieme chiuso non compatto di \mathbb{R}^n e sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$. Dimostrare che f ammette minimo assoluto.

8. Esercizio. Sia E un sottoinsieme di uno spazio di Hausdorff X . Dimostrare che E è chiuso e discreto se e solo se E è privo di punti di accumulazione.

9. Esercizio. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una successione di punti distinti di X (iniettiva).

- Mostrare che la successione è priva di sottosuccessioni convergenti se e solo se l'insieme $D = \{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ dei valori della successione è chiuso e discreto.
- Mostrare che la successione è priva di sottosuccessioni di Cauchy se e solo se D è *uniformemente discreto*, cioè esiste $\delta > 0$ tale che $d(x, y) \geq \delta$ per $(x, y) \in D, x \neq y$.
- Trovare un esempio di un sottoinsieme chiuso e discreto di \mathbb{R} che non sia uniformemente discreto.

10. Esercizio. Sia $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ e sia $D = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ l'insieme delle successioni binarie $\mathbf{c} = (c_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ove $c_j \in \{0, 1\}$ per ogni j . Dimostrare che la funzione $\sigma : D \rightarrow [0, 1]$ definita da

$$\sigma(\mathbf{c}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{2^j}$$

è effettivamente a valori in $[0, 1]$, è suriettiva, ma non è iniettiva. Dimostrare che la mappa $\iota : D \rightarrow [0, 1]$ definita da

$$\iota(\mathbf{c}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2c_j}{3^j}$$

è iniettiva ma non è suriettiva.

Dedurre che $\text{card } \mathbb{R} = \text{card } D = 2^{\aleph_0}$.

Posto $C = \iota(D)$, l'insieme C si chiama *insieme di Cantor*. Dimostrare che C è compatto ed ereditariamente sconnesso, cioè i suoi sottoinsiemi connessi sono solo i singoli.