

Analisi Matematica 2 per Matematica

Esercizi dodicesima settimana

1. Esercizio. Da [DM] svolgere i seguenti esercizi:

4.24.12, 4.24.13, 4.24.14, 4.24.16, 4.24.17, 4.24.18, 4.24.19.

2. Esercizio. Da [DMM] svolgere i seguenti esercizi:

4.56, 4.57, 4.58, 4.59, 4.60.

3. Esercizio. Svolgere gli esercizi relativi al §18.7 di [s].

Consideriamo una funzione vettoriale \vec{F} che ha per dominio un aperto di \mathbb{R}^3 :

$$\vec{F} = \vec{F}(P)$$

a valori in \mathbb{R}^3 .

In tal caso indichiamo con (x, y, z) le coordinate della variabile indipendente P e con (X, Y, Z) le coordinate della variabile dipendente \vec{F} .

La funzione \vec{F} si può scrivere con le tre equazioni:

$$\begin{cases} X = X(x, y, z) \\ Y = Y(x, y, z) \\ Z = Z(x, y, z) \end{cases} \quad (1)$$

Noi assumiamo che le tre funzioni componenti $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ siano continue con derivate parziali continue.

4. Esercizio. Sia $Q(\xi, \eta, \zeta)$ un punto fissato. Il campo scalare:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|P - Q|}$$

è il potenziale elettrostatico in P generato da una carica unitaria in Q . Con le coordinate si ha:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}}$$

Se calcoliamo l'opposto del gradiente, otteniamo il campo elettrostatico:

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|P - Q|^2} \frac{P - Q}{|P - Q|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P - Q}{|P - Q|^3}$$

Ponendo $\vec{E} = (X, Y, Z)$ si ha:

$$\begin{cases} X = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x - \xi}{\left((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ Y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{y - \eta}{\left((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ Z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z - \zeta}{\left((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

ove il dominio è costituito dai punti diversi da Q .

Si osservi che il campo elettrostatico ha una singolarità non eliminabile in Q , nel senso che:

$$\lim_{P \rightarrow Q} |\vec{E}(P)| = \lim_{P \rightarrow Q} \frac{1}{|P - Q|^2} = +\infty$$

5. Esercizio. Si ponga $\vec{r} = P - Q$, $r = |P - Q|$ e $\vec{v} = \frac{\vec{r}}{r}$.

Se $V(P)$ è il potenziale elettrostatico dell'esempio, dimostrare che:

- a) $P = Q + r\vec{v}$;
- b) $V(Q + r\vec{v}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$;
- c) $\left(\frac{\partial V}{\partial \vec{v}}\right)_P = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{Q+r\vec{v}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$;
- d) $\lim_{P \rightarrow Q} |P - Q|^2 V(P) = 0$;
- e) $\lim_{P \rightarrow Q} |P - Q|^2 \left(\frac{\partial V}{\partial \vec{v}}\right)_P = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

Dal punto b) si ottiene che in coordinate sferiche il potenziale $V(r)$ è la funzione $\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}$.

6. Esercizio. Leggere e capire le prime 7 pagine della dispensa Integrali di superficie. Verificare, nei casi $n = 3$ e $n = 4$, che il determinante jacobiano della *trasformazione coordinate sferiche* $x = r\vec{v}$ vale:

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(r, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-1})} = r^{n-1} \sin \vartheta_2 \sin^2 \vartheta_3 \cdots \sin^{n-3} \vartheta_{n-2} \sin^{n-2} \vartheta_{n-1}$$

BIBLIOGRAFIA

[DM] G. De Marco, *Analisi Due*, Decibel Zanichelli.

[DMM] G. De Marco, C. Mariconda, *Esercizi di calcolo in più variabili*, Decibel Zanichelli.

[S] G.F. Simmons, *Calculus with Analytic Geometry*, McGraw-Hill, New York (1996).