Esercizi nona settimana[1]

Le seguenti funzioni dipendono da alcuni parametri. Determinare condizioni sui parametri affinché esse siano di classe C^1.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{per } x < 1, \\ mx + q & \text{per } 1 \le x. \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x & \text{per } x < 0, \\ ax^2 + bx + c & \text{per } 0 \le x < 1, \\ x + 1 & \text{per } x \ge 1. \end{cases}$$

Sia f una funzione reale definita in un intervallo J tale che:

$$|f(x) - f(y)| \le |x - y|^\alpha \qquad \text{per ogni } x, y \in J \text{ e qualche } \alpha > 1.$$

Dimostrare che f è derivabile con derivata identicamente nulla.

Sia $f(x) = x + \arctan x$. Dimostrare che f è un diffeomorfismo di$\mathbb{R}$ su tutto $\mathbb{R}$ e calcolare $(f^{-1})'(0)$.

Dimostrare che la funzione $f(x) = x + \log x + e^x$ definita per $x > 0$ è strettamente crescente e determinare l'immagine di f.

Dimostrare che se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = m \in \mathbb{R}$ allora $m = 0$.

Dimostrare che se $\lim_{x \to +\infty} f'(x)$ esiste non nullo in $\tilde{\mathbb{R}}$ allora $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$.

Studiare la famiglia di funzioni f_a, $a > 0$, così definite per $x > 0$:

$$f_a(x) = \left(\frac{a}{x}\right)^x$$

Dimostrare in particolare che ogni funzione ha almeno un flesso.

Si consideri la funzione $E(x) =$ *massimo intero* $\le x$.
Dopo averne disegnato il grafico, dimostrare che essa è localmente integrabile. Determinare poi:

$$F(x) = \int_2^x E(t)\, dt$$

Stesse domande per $\operatorname{frac} x = E(x) - x$ e per $g(x) = |\sin x|$.

[1] Ringrazio il Dott. Paolo Guiotto per aver messo a disposizione una parte del materiale didattico qui riportato.

Calcolare una primitiva di ciascuna delle seguenti funzioni:

xe^{x^2}	$\sqrt{1+x}$	$\frac{\sqrt{1+\tan x}}{\cos^2 x}$
e^{-2x+5}	$\cos^3 x$	$\tanh x$
$\frac{1+\sin x}{(x-\cos x)^4}$	$x\cos x$	$x^\alpha \log x,\ \alpha \neq -1$
$\arcsin x$	$\arcsin\sqrt{x}$	$\sin^2 x$
$e^x \sin x$	$\arctan x$	$\log(x+\sqrt{1+x^2})$
$\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$	$\frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}$
$\sin\log x$	$\cos\sqrt{x}$	$e^{\sqrt{x}}$
$\sqrt{e^x-1}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$	$\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$
$\frac{1}{x\sqrt{2x-1}}$	$\sqrt{\frac{x}{1-x}}$	$\sqrt{1-x^2}$
$\frac{3x+1}{x^2-5x+6}$	$\frac{3x-1}{x^2-2x+5}$	$\frac{5x+9}{x^2+2x+3}$
$\frac{x}{(1+x^2)^2}$	$\frac{1}{(1+x^2)^2}$	$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$
$\frac{1}{x^6+x^4}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}$	$\frac{1}{x+\sqrt{2x+3}}$
$\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)^3$	$\frac{1}{\sin x}$	$\frac{\sin x}{1+\sin x}$
$\frac{1}{1+e^x}$	$\frac{1}{\sinh x}$	$\frac{1}{1+2\cos x}$