ESPONENZIALE COMPLESSO

Umberto Marconi

Dipartimento di Matematica Pura e Applicata – Padova

Sia $z = x + iy$ una variabile complessa, con $x = \Re z$ e $y = \Im z$. Definiamo:

$$e^z = \exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots \tag{1}$$

Una facile applicazione del criterio del rapporto mostra che la series (1) converge assolutamente per ogni $z \in \mathbb{C}$. Ovviamente $\exp 0 = 1$; sappiamo anche che la funzione esponenziale reale e^x coincide con la somma della serie esponenziale $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Vogliamo dimostrare la seguente proprietà di omomorfismo:

$$\exp(z + w) = (\exp z)(\exp w) \tag{2}$$

Si ha infatti:

$$\begin{aligned}
\exp(z+w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \right) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} \right) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \\
&= \text{prodotto definito in } [\textbf{S, par. 14.7}] = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \right) = \\
&= (\exp z)(\exp w)
\end{aligned}$$

Si osservi che per la proprietà di omomorfismo si ha:

$$\begin{aligned}
\exp(x+iy) &= e^x \exp iy = e^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n y^n}{n!} \right) = \\
&= e^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \frac{y^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+1} \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = \\
&= e^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = \\
&= e^x (\cos y + i \sin y)
\end{aligned}$$

Vogliamo ora determinare il limite della successione, con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n} + i\frac{y}{n}\right)^n = w_n^n$$

ove $w_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right) + i\frac{y}{n}$.
Poniamo:

$$r_n = |w_n| = \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos\vartheta_n = \frac{1}{r_n}\left(1+\frac{x}{n}\right) \qquad \sin\vartheta_n = \frac{1}{r_n}\frac{y}{n}$$

da cui:

$$w_n = r_n(\cos\vartheta_n + i\sin\vartheta_n)$$

Osserviamo che:

$$\sin\vartheta_n = \frac{1}{n}\frac{y}{1+\frac{x}{n}}\cos\vartheta_n \tag{3}$$

Poiché w_n e $\cos\vartheta_n$ tendono a 1, possiamo scegliere $-\frac{\pi}{2} < \vartheta_n < \frac{\pi}{2}$, per cui dovrà essere $\lim \vartheta_n = 0$. Si ha:

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = w_n^n = r_n^n\left(\cos n\vartheta_n + i\sin n\vartheta_n\right)$$

Da (3) si ottiene:

$$n\vartheta_n\frac{\sin\vartheta_n}{\vartheta_n} = \frac{y}{1+\frac{x}{n}}\cos\vartheta_n$$

Passando al limite in entrambi i membri si ottiene:

$$\lim_n n\vartheta_n = y \quad \text{da cui} \quad \lim_n\left(\cos n\vartheta_n + i\sin n\vartheta_n\right) = \cos y + i\sin y$$

Rimane da calcolare:

$$\lim_n r_n^n = \lim_n\left(1+\frac{x^2}{n^2}+\frac{y^2}{n^2}+2\frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{2}n} = \exp\left(\lim_n \frac{n}{2}\frac{x^2}{n^2}+\frac{n}{2}\frac{y^2}{n^2}+\frac{n}{2}\frac{2x}{n}\right) = \exp x = e^x$$

Perciò:

$$\lim_n\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \lim_n w_n^n = \lim_n r_n^n\left(\cos n\vartheta_n + i\sin n\vartheta_n\right) = e^x\left(\cos y + i\sin y\right) = \exp z$$

Spesso è più comodo scrivere e^z invece di $\exp z$. Elenchiamo alcune proprietà di e^z.

- $|e^z| = e^{\Re z} = e^x$; $e^z \neq 0$, $e^0 = 1$, $e^1 = e$.
- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ per ogni z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, cioè e^z è un omomorfismo dal gruppo additivo dei complessi su tutto il gruppo moltiplicativo dei complessi diversi da 0.
- Se t varia in $\mathbb{R}$, la funzione *avvolgimento* $e^{it} = \cos t + i\sin t$ è un omomorfismo suriettivo dal gruppo additivo dei reali al gruppo moltiplicativo dei complessi di modulo 1.
- Per ogni $w \neq 0$ esiste $z \in \mathbb{C}$ tale che $e^z = w$. Tale z è individuato a meno di costanti additive che sono multipli interi di $2\pi i$, cioè e^z è *periodica* di periodo $2\pi i$ ed è iniettiva su ogni striscia $\alpha \leq \Im z < \alpha + 2\pi i$, con α numero reale preassegnato; è consuetudine scegliere $\alpha = -\frac{\pi}{2}$.
- Poiché, se $t \in \mathbb{R}$, si ha:

  $$e^{it} = \cos t + i\sin t \quad \text{e} \quad e^{-it} = \cos t - i\sin t$$

  sommando e sottraendo si ottengono le formule di Eulero:

  $$\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} \qquad \sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$$

  Tali formule permettono di definire $\cos z$ e $\sin z$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ come:

  $$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

  Le funzioni $\cos z$ e $\sin z$ sono suriettive e periodiche di periodo 2π; esse hanno gli stessi zeri delle funzioni trigonometriche reali.
  Inoltre $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$ e $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

- Le funzioni e^z, $\cos z$, $\sin z$ sono infinitamente derivabili, perché somma di serie di potenze convergenti su tutto il piano complesso.

Esercizio. Risolvere le seguenti equazioni:

$$e^z = -1 \qquad \exp \overline{z} = -2 \qquad \cos z = -2 \qquad \sin \overline{z} = 5$$

Esercizio. Trovare l'immagine dell'asse degli immaginari puri tramite $\exp z$ e tramite $\sin z$.
Trovare l'immagine di una retta parallela all'asse reale tramite $\exp z$.
Trovare l'immagine di una retta parallela all'asse immaginario tramite $\exp z$.

Esercizio. Si definisca $\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ e $\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$.
Trovare l'espansione in serie di $\cosh z$ e $\sinh z$.
Determinare $\cosh iz = \ldots$ e $\sinh iz = \ldots$
Risolvere le equazioni $\sinh z = i$ e $\cosh z = -4$.

BIBLIOGRAFIA

[R] R. Remmert, *Theory of Complex Functions*, Springer Verlag, New York (1991).

[S] G F. Simmons, *Calculus with Analytic Geometry*, McGraw-Hill, New York (1996).

Nella prossima pagina riportiamo un'osservazione di carattere storico tratta da **[R]** sui valori $\zeta(2n)$.

of convergence without examining the zeros of the denominator, which was mentioned in 7.4.5.

The Euler formulas will be generalized in 14.3.4.

2. Historical remarks on the Euler $\zeta(2n)$-formulas. As early as 1673 during LEIBNIZ's first visit to London J. PELL, an expert in series summation, had posed to him the problem of summing the reciprocals of the squares. LEIBNIZ had maintained in youthful exuberance that he could sum *any* series, but Pell's query made clear to him his limitations. The brothers Jakob and Johann BERNOULLI (the latter was EULER's teacher) also expended quite a lot of effort in vain trying to find the value of the sum $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots$.

Finally, in the year 1734, using the product formula he had discovered for the sine, EULER in his work "De summis serierum reciprocarum" (*Opera Omnia* (1) **14**, 73-86) proved his famous identities

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2}=\frac{\pi^2}{6}\,,\quad \sum_1^\infty \frac{1}{\nu^4}=\frac{\pi^4}{90}\,,\quad \sum_1^\infty \frac{1}{\nu^6}=\frac{\pi^6}{945}\,,\quad \sum_1^\infty \frac{1}{\nu^8}=\frac{\pi^8}{9450}\,,\quad \cdots$$

It is often said of the first of these identities that it is among the most beautiful of all Euler's formulas.

Euler's problems in summing the series $\sum \nu^{-2n}$ were described in detail by P. STÄCKEL in a note entitled "Eine vergessene Abhandlung Leonhard Eulers über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen," *Biblio. Math.*(3) **8**(1907/08), 37-54 (also included in Euler's *Opera Omnia* (1) **14**, 156-176). Also interesting is the article "Die Summe der reziproken Quadratzahlen," by O. SPIESS in the *Festschrift* to the 60th birthday of Prof. Andreas Speiser, Orell Füssli Verlag, Zürich 1945, pp. 66-86; and the paper by R. AYOUB entitled "Euler and the Zeta function," *Amer. Math. Monthly* **81**(1974), 1067-1086.

3. The differential equation for ε_1 and an identity for the Bernoulli numbers. Because $(\cot z)' = -1-(\cot z)^2$ (cf. 5.2.5), it follows that

$$(1)\qquad \varepsilon_1' = -\varepsilon_1^2 - \pi^2;$$

the function ε_1 thus solves the differential equation $y' = -y^2-\pi^2$. With the help of (1) we get an elegant but not very well known recursion formula for the numbers $\zeta(2n)$, namely

$$(2)\qquad (n+\tfrac{1}{2})\zeta(2n) = \sum_{\substack{k+\ell=n\\ k\geq 1,\ell\geq 1}} \zeta(2k)\zeta(2\ell) \quad \text{for } n>1, \qquad \zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}.$$

Proof. Using the differentiation theorem 1.2 and 1(1), we get