

Spazi connessi

Sia A un sottoinsieme di uno spazio topologico X . L'equivalenza delle seguenti condizioni consegue dal fatto che i sottoinsiemi chiusi sono esattamente i complementari dei sottoinsiemi aperti.

i) A è sia chiuso che aperto, cioè *chiusaperto*.

ii) A e $X \setminus A$ sono entrambi aperti.

ii) A e $X \setminus A$ sono entrambi chiusi.

Definizione. Uno spazio topologico X si dice *connesso* se soddisfa una delle seguenti condizioni equivalenti (l'equivalenza segue dall'osservazione precedente):

i) Non esiste un sottoinsieme chiusaperto proprio e non vuoto.

ii) Non esistono due aperti non vuoti A e B tali che $A \cup B = X$ e $A \cap B = \emptyset$.

ii bis) Se A e B sono aperti non vuoti tali che $A \cup B = X$ allora $A \cap B \neq \emptyset$.

iii) Non esistono due chiusi non vuoti A e B tali che $A \cup B = X$ e $A \cap B = \emptyset$.

iii bis) Se A e B sono chiusi non vuoti tali che $A \cup B = X$ allora $A \cap B \neq \emptyset$.

In sostanza, uno spazio topologico è connesso se non lo si può spezzare in una partizione di due aperti (chiusi) non vuoti.

Osservazione. Se S è un sottospazio di X , dire che S si può spezzare in due aperti (chiusi) non vuoti vuol dire che questi aperti vanno scelti nella topologia relativa. Pertanto un sottospazio S non è connesso se è soddisfatta una delle seguenti due condizioni:

Esistono due aperti (due chiusi) A e B di X tali che:

$$A \cap B \cap S = \emptyset, \quad A \cup B \supseteq S, \quad A \cap S \neq \emptyset, \quad B \cap S \neq \emptyset$$

Teorema. Siano X e Y spazi topologici (X può essere anche sottospazio di un altro spazio) e sia $f: X \rightarrow Y$ una funzione continua. Se X è connesso, allora $f(X)$ è connesso.

Dimostrazione. Siano A e B sottoinsiemi aperti di Y tali che $A \cup B \supseteq f(X)$ e $A \cap B \cap f(X) = \emptyset$. Per la continuità di f , i sottoinsiemi $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ sono aperti disgiunti di X tali che $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = X$. Siccome X è connesso, si deve avere per esempio $f^{-1}(B) = \emptyset$, e pertanto $B \cap f(X) = \emptyset$, e dunque $f(X)$ è connesso.

Proposizione. Un sottospazio S della retta reale è connesso se e solo se S è un intervallo.

Dimostrazione. Supponiamo che S non sia un intervallo. Allora esistono $x, y \in S$ e $z \in \mathbb{R} \setminus S$ tali che $x < z < y$. Allora i sottoinsiemi $(-\infty, z[$ e $]z, +\infty)$ sono due aperti disgiunti di \mathbb{R} che coprono S e hanno intersezione non vuota con S .

Dobbiamo dimostrare ora che se S è un intervallo allora S è connesso.

Sia A un sottoinsieme proprio e non vuoto di S . Dobbiamo dimostrare che se A è chiuso nella topologia relativa, allora A non può essere aperto nella topologia relativa. Siccome A è proprio e non vuoto, esistono $a, b \in S$ tali che $a \in A$ e $b \in S \setminus A$. Supponiamo $a < b$. Poiché A è chiuso nella topologia relativa, esiste un chiuso F di \mathbb{R} tale che $F \cap S = A$.

Siccome $[a, b] \subseteq S$, otteniamo che $A \cap [a, b] = F \cap [a, b]$ è un sottoinsieme chiuso e limitato di \mathbb{R} (naturalmente esso è un sottoinsieme di S). Pertanto $A \cap [a, b]$ ammette un punto massimo c , e si ha $c < b$ perché $b \notin A$. Di conseguenza $]c, b[$ è un sottoinsieme di S disgiunto da A . Poiché c è di accumulazione per l'intervallo $]c, b[$, nessun intorno di c può intersecare S in un sottoinsieme contenuto in A (ogni intorno deborda in punti di S che stanno a destra di c). In conclusione, abbiamo trovato un punto $c \notin \text{Int}_S(A)$ e quindi A non può essere aperto nella topologia relativa.

Teorema di tutti i valori. [v. DGM 12.8.1] *Siano X uno spazio topologico connesso (per esempio un intervallo di \mathbb{R}) ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $f(X)$ è un intervallo di \mathbb{R} .*

Dimostrazione. $f(X)$ è connesso e pertanto è un intervallo di \mathbb{R} .

Corollario. Teorema degli zeri, v. testo.

Proposizione. *Sia E un sottoinsieme convesso di \mathbb{R}^2 . Allora E è connesso.*

Dimostrazione. Sia A un sottoinsieme proprio, non vuoto e chiusaperto nella topologia relativa di E . Sia $p \in A$ e sia $q \in E$. Sia $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ il segmento $\sigma(t) = p + t(q - p)$. La funzione σ è continua e pertanto la sua immagine è connessa. Poiché tale immagine è il segmento $[p, q]$ di estremi p e q , tale segmento è tutto contenuto in E . Pertanto $A \cap [p, q]$ è un chiusaperto di $[p, q]$; essendo esso non vuoto, si deve avere $A \cap [p, q] = [p, q]$ e dunque $q \in A$. Allora $A = E$.

Esercizio importante. Dimostrare che un'unione di sottospazi connessi con un punto in comune è un sottospazio connesso.

Esercizio. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$. Supponiamo che E sia *stellato* rispetto a un punto c , cioè che per ogni punto $p \in E$ si abbia $[c, p] \subseteq E$. Dimostrare che E è connesso.

Esercizio. Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione continua fra spazi topologici. Dimostrare che se X è connesso allora il grafico di f è connesso.