

## Inversione locale

Riportiamo e risolviamo l'esercizio 2.20.6 dal libro «Analisi Due» di G. De Marco.

Siano  $X$  spazio normato completo,  $D \subseteq X$  e  $\varphi : D \rightarrow X$  una funzione lipschitziana con costante  $\lambda < 1$ . Se consideriamo la funzione  $u = \text{id} - \varphi$ , vogliamo dimostrare che  $u$  è iniettiva e che  $u^{-1}$  è lipschitziana (ovviamente  $u$  è lipschitziana).

Per ogni  $x_1, x_2 \in D$  si ha, tenendo conto che  $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq \lambda|x_1 - x_2|$ :

$$\begin{aligned} |u(x_1) - u(x_2)| &= |(x_1 - x_2) - (\varphi(x_1) - \varphi(x_2))| \geq \\ &\geq |x_1 - x_2| - |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \geq \\ &\geq (1 - \lambda)|x_1 - x_2| \end{aligned}$$

Da ciò otteniamo:

$$(\star) \quad |u(x_1) - u(x_2)| \geq (1 - \lambda)|x_1 - x_2|$$

Da  $(\star)$  si ottiene che se  $x_1 \neq x_2$  allora  $u(x_1) \neq u(x_2)$ .

Inoltre, ponendo  $u(x) = y$  e dividendo per  $1 - \lambda$ , si ottiene che  $u^{-1} : u(D) \rightarrow D$  è lipschitziana. Dunque  $(\star)$  è un modo per scrivere che  $u^{-1}$  è lipschitziana.

Consideriamo ora un punto  $x_0 \in \text{Int}(D)$  e poniamo  $y_0 = u(x_0)$ .

Dobbiamo dimostrare che se la palla chiusa  $B_r(x_0) \subseteq D$  allora  $u(B_r(x_0)) \supseteq B_{(1-\lambda)r}(y_0)$ .

Sia  $w$  tale che  $|w - y_0| \leq (1 - \lambda)r$ . Dobbiamo dimostrare che esiste  $x \in B_r(x_0)$  tale che  $u(x) = x - \varphi(x) = w$ .

L'ultima uguaglianza è equivalente a  $x = \varphi(x) + w$ . Dobbiamo dunque dimostrare che la funzione  $T(x) = \varphi(x) + w$  ammette un punto unito in  $B_r(x_0)$ .

Poiché  $T$  ha costante di Lipschitz  $\lambda < 1$ , basta dimostrare che  $T$  manda  $B_r(x_0)$  in sé (le palle chiuse sono complete e quindi si applica il lemma delle contrazioni). Abbiamo, poiché  $x_0 - \varphi(x_0) = u(x_0) = y_0$ :

$$\begin{aligned} |T(x) - x_0| &= |\varphi(x) + w - x_0| = |\varphi(x) - \varphi(x_0) + w + \varphi(x_0) - x_0| = \\ &= |\varphi(x) - \varphi(x_0) + w - (x_0 - \varphi(x_0))| = \\ &= |(\varphi(x) - \varphi(x_0)) + (w - y_0)| \leq \lambda|x - x_0| + (1 - \lambda)r \leq \lambda r + r - \lambda r = r \end{aligned}$$

e dunque  $T(x) \in B_r(x_0)$ .

Abbiamo dunque dimostrato che la funzione iniettiva e bi-lipschitziana  $u$  manda  $B_r(x_0)$  in un insieme che contiene  $B_{(1-\lambda)r}(y_0)$ .

Scelto ora un aperto  $V$  di  $X$  tale che  $y_0 \in V \subseteq B_{(1-\lambda)r}(y_0)$ , per l'iniettività si ha che  $u^{-1}(V)$  è contenuto in  $B_r(x_0)$  ed è inoltre aperto nella topologia relativa di  $B_r(x_0)$  e dunque esiste un aperto  $A$  di  $X$  tale che  $A \cap B_r(x_0) = u^{-1}(V)$ . Posto  $U = A \cap \text{Int}(B_r(x_0))$ , otteniamo che  $W = u(U)$  è aperto in  $V$ , e quindi in  $X$ , e la mappa  $u$  è un omeomorfismo bi-lipschitziano dall'intorno aperto  $U$  di  $x_0$  all'intorno aperto  $W$  di  $y_0$ .

**Teorema 1 (Teorema di inversione locale)** *Siano  $X, Y$  spazi normati completi,  $D$  aperto di  $X$ ,  $f : D \rightarrow Y$  una funzione di classe  $C^1$ ; si supponga che per un  $x_0 \in D$*

il differenziale  $f'(x_0)$  sia isomorfismo algebrico e topologico di  $X$  su  $Y$ , cioè  $f'(x_0) \in \text{Iso}(X, Y)$ . Esistono allora intorno aperti  $U$  di  $x_0$ ,  $V$  di  $y_0 = f(x_0)$  tali che  $f$  induce un omeomorfismo di  $U$  su  $V$ ; detta  $g$  l'inversa di tale omeomorfismo,  $g \in C^1(V, U)$  e inoltre:

$$g'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}$$

Più in generale  $g'(y) = (f'(g(y)))^{-1}$ .

**Dimostrazione.** Poiché  $\text{Iso}(X, Y)$  è aperto in  $L(X, Y)$  e  $f$  è di classe  $C^1$ , non è restrittivo supporre che  $f'(x) \in \text{Iso}(X, Y)$  per ogni  $x \in D$ .

Sia  $Q = f'(x_0)$  e consideriamo la funzione  $h : D \rightarrow X$  definita da  $h = Q^{-1} \circ f$ . Osserviamo che  $h$  è di classe  $C^1$  e si ha  $h'(x) = Q^{-1} \circ f'(x)$  e dunque  $h'(x) \in G_L(X)$  per ogni  $x \in X$ . Osserviamo che  $h'(x_0) = Q^{-1} \circ f'(x_0) = Q^{-1} \circ Q = \text{id}_X$ . Sia ora  $\varphi = \text{id}_X - h$ , cioè  $\varphi(x) = x - h(x)$ . Allora  $\varphi'(x_0) = \text{id}_X - \text{id}_X = 0_X$ , cioè l'applicazione lineare nulla. Scelto un numero positivo reale  $\lambda < 1$ , per la continuità di  $\varphi'$  si ha che esiste  $B_r(x_0) \subseteq D$  tale che  $\|\varphi'(x)\| \leq \lambda$  per ogni  $x \in B_r(x_0)$ . Dal teorema del valor medio otteniamo allora che la funzione  $\varphi$  è lipschitziana con costante  $\lambda < 1$ . Per l'esercizio precedente la funzione  $h = u = \text{id}_X - \varphi$  induce un omeomorfismo da un intorno aperto  $U$  di  $x_0$  a un intorno aperto  $W$  di  $u(x_0) = h(x_0) = Q^{-1}(y_0)$ . Posto  $V = Q(W)$ , otteniamo che  $f = Q \circ h$  induce un omeomorfismo da  $U$  a  $V$ .

Se dimostriamo che  $h^{-1}$  è differenziabile in  $z_0 = h(x_0)$  e che  $(h^{-1})'(z_0) = \text{id}_X$ , otteniamo che  $g = f^{-1} = h^{-1} \circ Q^{-1}$  è differenziabile in  $y_0$  e  $g'(y_0) = (f^{-1})'(y_0) = \text{id}_X \circ Q^{-1} = Q^{-1}$ . Ci servirà utilizzare (\*) dell'esercizio precedente con  $u = h$  nella forma:

$$(\star\star) \quad \frac{|x_1 - x_2|}{|h(x_1) - h(x_2)|} \leq \frac{1}{1 - \lambda} \quad \forall x_1 \neq x_2 \in U$$

Per dimostrare la differenziabilità di  $h^{-1}$  in  $z_0$ , con  $(h^{-1})'(z_0) = \text{id}_X$  basta dimostrare che il rapporto (qui  $z \in W$  e  $x \in U$ )

$$(\star\star\star) \quad \frac{h^{-1}(z) - h^{-1}(z_0) - \text{id}_X \cdot (z - z_0)}{|z - z_0|} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$$

Il rapporto è uguale a

$$\frac{h^{-1}(z) - h^{-1}(z_0) - (z - z_0)}{|z - z_0|}$$

e mediante il cambiamento di variabile  $z = h(x)$  esso diventa:

$$\frac{x - x_0 - (h(x) - h(x_0))}{|h(x) - h(x_0)|}$$

Dividiamo e moltiplichiamo il denominatore per  $|x - x_0|$  ottenendo:

$$\frac{x - x_0 - (h(x) - h(x_0))}{|x - x_0|} \cdot \frac{|x - x_0|}{|h(x) - h(x_0)|}$$

Il secondo fattore è limitato per ( $\star\star$ ), il primo fattore è infinitesimo per definizione di  $h'(x_0) = \text{id}_X$ , da cui ( $\star\star\star$ ).

Poiché in ogni altro punto  $x \in U$  sussistono le ipotesi del teorema, si ottiene che  $g = f^{-1}$  è differenziabile in  $V$  e vale la formula  $g'(y) = (f'(g(y)))^{-1}$ . Poiché da  $\text{Iso}(X, Y) \rightarrow \text{Iso}(Y, X)$  l'inversione è continua, si ottiene che  $g'$  è continua.