FUNZIONI IPERBOLICHE

Umberto Marconi

Dipartimento di Matematica Pura e Applicata – Padova

1 Premessa

Sia $x \in [0, 1[$, x fissato. Vogliamo capire cosa significa:

$$\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} dw$$

perché la funzione integranda è illimitata.
Se consideriamo, per $b \in [x, 1[$, la funzione integrale:

$$I(b) = \int_x^b \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} dw$$

essa è una funzione crescente della variabile b, poiché la funzione integranda è positiva. Dimostriamo che $I(b)$ è limitata. Da $(1-w^2)^{-\frac{1}{2}} \leq (1-w)^{-\frac{1}{2}}$ si ottiene:

$$\int_x^b \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} dw \leq \int_x^b \frac{1}{\sqrt{1-w}} dw = \left| -2\sqrt{1-w} \right|_x^b = 2(\sqrt{1-x} - \sqrt{1-b}) \leq 2\sqrt{1-x}$$

Per il teorema sul limite della funzione monotona, esiste finito il limite $\lim_{b \to 1^-} I(b)$. Si pone per definizione:

$$\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} dw = \lim_{b \to 1^-} \int_x^b \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} dw$$

Poiché $\int_x^1 = \int_0^1 - \int_0^x$, si ottiene:

$$\frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} dw = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

e inoltre:

$$\lim_{x \to 1^-} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} dw = 0$$

per cui possiamo dire che $\int_x^1$ vale 0 per $x = 1$.
Se $x > 1$, un analogo significato ha l'integrale:

$$\int_1^x \frac{1}{\sqrt{w^2-1}} dw$$

2 Funzioni circolari

Sia s la doppia area del settore circolare di raggio a e con centro l'origine, il cui arco ha estremi in $A(a, 0)$ e in $P(\overline{x}, \overline{y})$, con $\overline{x} \in [0, a]$ e $\overline{y} = \sqrt{a^2 - \overline{x}^2}$. Se facciamo un disegno otteniamo:

$$s = 2 \cdot \text{area triangolo } OP'P + 2 \cdot \text{area } T$$

con $P'(\overline{x}, 0)$ e T il trapezoide definito dalle disuguaglianze $\overline{x} \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}$. Integrando per parti la funzione $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
s &= \overline{x}\,\overline{y} + 2\int_{\overline{x}}^{a} y\,dx = \\
&= \overline{x}\,\overline{y} + 2\left[\left|xy\right|_{\overline{x}}^{a} - \int_{\overline{x}}^{a} x\,dy\right] = \\
&= \overline{x}\,\overline{y} + 2[(a \cdot 0 - \overline{x}\,\overline{y}) - \int_{\overline{x}}^{a} x\,dy] = \\
&= -\overline{x}\,\overline{y} - 2\int_{\overline{x}}^{a} x d\sqrt{a^2 - x^2} = \\
&= -\overline{x}\,\overline{y} - 2\int_{\overline{x}}^{a} \frac{a^2 - x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \\
&= -\overline{x}\,\overline{y} - 2\int_{\overline{x}}^{a} y\,dx + 2a^2 \int_{\overline{x}}^{a} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx
\end{aligned}$$

Poiché i primi due termini dell'ultima espressione danno $-s$, portandoli all'inizio e dividendo per 2 otteniamo:

$$s = a^2 \int_{\overline{x}}^{a} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a^2 \int_{\frac{\overline{x}}{a}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - w^2}} dw$$

Prendendo ora (x, y) variabile nell'arco sul primo quadrante, otteniamo la funzione area:

$$s = a^2 \int_{\frac{x}{a}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - w^2}} dw$$

Poiché $\frac{x}{a}$ non dipende dal raggio a ma solo dall'ampiezza dell'angolo, per uno stesso angolo l'integrale definito non dipende dal raggio; il rapporto $\alpha = \frac{s}{a^2}$ si chiama *misura in radianti* dell'angolo, per cui l'area del settore è data da $\frac{1}{2}s = \frac{1}{2}a^2\alpha$.
In particolare per il circolo unitario $x^2 + y^2 = 1$ si ottiene:

$$s = \alpha = \int_{x}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - w^2}} dw \overset{\text{def}}{=\!=} \arccos x \qquad \text{con } x \in [1, 0]$$

Se integrassimo *in verticale* otterremmo:

$$s = \alpha = \int_{0}^{y} \frac{1}{\sqrt{1 - w^2}} dw \overset{\text{def}}{=\!=} \arcsin y \qquad \text{con } y \in [0, 1]$$

Nelle formule precedenti il legame tra x e y è dato da $x = \sqrt{1 - y^2}$.
Le funzioni trovate sono derivabili con derivata continua, perché sono funzioni integrali. Derivando si vede immediatamente che arccos è decrescente e concava mentre arcsin è crescente e convessa, nei domini indicati.
Chiamando $\frac{\pi}{2}$ la misura in radianti di un quarto di giro, si ha arccos e arcsin mandano l'intervallo $[0, 1]$ su tutto l'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$; chiamando $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$ le inverse di $\arccos x$

e $\arcsin y$ nei domini indicati, si ottengono le equazioni parametriche dell'arco di circolo unitario nel primo quadrante:

$$\begin{cases} x = \cos\alpha \\ y = \sin\alpha \end{cases}$$

Da quanto detto si possono dedurre le proprietà delle funzioni trigonometriche, interpretando la funzione avvolgimento come la doppia area spazzata dal raggio vettore del circolo unitario.
Come esempio dimostriamo la formula di duplicazione, con $y < \frac{\pi}{4}$.
Se $\alpha = \arcsin y = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} dw$ allora $y = \sin\alpha$ e $x = \cos\alpha = \sqrt{1-y^2}$.
Dobbiamo dimostrare che $2yx = 2y\sqrt{1-y^2} = \sin 2\alpha$, ovvero che se l'estremo di integrazione è $2y\sqrt{1-y^2}$ allora l'angolo è 2α. In formula:

$$\int_0^{2y\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = 2\int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} dv$$

formula di facile verifica con la sostituzione $u = 2v\sqrt{1-v^2}$, oppure derivando membro a membro (per $y < \frac{\pi}{4}$).

3 Funzioni iperboliche

Esercizio 1 Siano $f(s)$ e $g(s)$ due funzioni derivabili tali che $\frac{df}{ds} = g$ e $\frac{dg}{ds} = f$. Si supponga che $(f(0), g(0)) = (1, 0)$. Dimostrare che:

$$f(s) = \frac{e^s + e^{-s}}{2} \qquad g(s) = \frac{e^s - e^{-s}}{2}$$

(Sugg.: le funzioni $e^{-s}(f(s) + g(s))$ e $e^s(f(s) - g(s))$ hanno derivata $0\ldots$)

L'equazione dell'iperbole equilatera di semiasse $a > 0$, riferita agli assi, è:

$$x^2 - y^2 = a^2$$

Si osservi che l'omotetia di rapporto $\frac{b}{a}$ trasforma tale iperbole nell'iperbole $x^2 - y^2 = b^2$ (ovviamente due punti omotetici sono allineati con l'origine).
Consideriamo il ramo di iperbole con $x \geq a$ e prendiamo su di esso un punto $P(\overline{x}, \overline{y})$ con $\overline{y} \geq 0$. Il settore iperbolico relativo all'arco di estremi $P(\overline{x}, \overline{y})$ e $P'(\overline{x}, -\overline{y})$ è la regione piana delimitata dall'arco e dai *raggi* che congiungono il centro O con gli estremi dell'arco.
Vogliamo determinare l'area s del settore iperbolico. Se facciamo un disegno otteniamo:

$$s = \text{area triangolo } OP'P - 2 \cdot \text{area } T$$

ove T il trapezoide definito dalle disuguaglianze $a \leq x \leq \overline{x}$, $0 \leq y \leq \sqrt{x^2 - a^2}$.

Integrando per parti la funzione $y = \sqrt{x^2 - a^2}$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
s &= \overline{x}\,\overline{y} - 2\int_a^{\overline{x}} y\,dx = \\
&= \overline{x}\,\overline{y} - 2\left[\left|xy\right|_a^{\overline{x}} - \int_a^{\overline{x}} x\,dy\right] = \\
&= \overline{x}\,\overline{y} - 2[(\overline{x}\,\overline{y} - a\cdot 0) - \int_a^{\overline{x}} x\,dy] = \\
&= -\overline{x}\,\overline{y} + 2\int_a^{\overline{x}} xd\sqrt{x^2-a^2} = \\
&= -\overline{x}\,\overline{y} + 2\int_a^{\overline{x}} \frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \\
&= -\overline{x}\,\overline{y} + 2\int_a^{\overline{x}} y\,dx + 2a^2\int_a^{\overline{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx
\end{aligned}$$

Poiché i primi due termini dell'ultima espressione danno $-s$, portandoli all'inizio e dividendo per 2 otteniamo:

$$s = a^2\int_a^{\overline{x}} \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = a^2\int_1^{\frac{\overline{x}}{a}} \frac{1}{\sqrt{w^2-1}}dw$$

Se ora $(\tilde{x}, \tilde{y})$ è il trasformato di $(\overline{x}, \overline{y})$ tramite l'omotetia di rapporto $\frac{b}{a}$, si ha $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = b^2$ e l'angolo del settore iperbolico individuato da quest'ultimo punto sulla nuova iperbole è lo stesso di quello individuato da $(\overline{x}, \overline{y})$. Indicando con s_a e s_b le aree dei settori delle due iperboli, si ha:

$$\frac{s_a}{a^2} = \int_1^{\frac{\overline{x}}{a}} \frac{dw}{\sqrt{w^2-1}} = \int_1^{\frac{\tilde{x}}{b}} \frac{dw}{\sqrt{w^2-1}} = \frac{s_b}{b^2}$$

Per questo motivo non si perde di generalità supponendo $a = 1$. Per l'iperbole $x^2 - y^2 = 1$, indicando con (x, y) l'estremo dell'arco nel primo quadrante, si ha che l'area del settore iperbolico è data da:

$$s = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{w^2-1}}dw \qquad \text{con } 1 \leq x$$

Se integrassimo in verticale (esercizio) otterremmo (per l'iperbole $x^2 - y^2 = 1$):

$$s = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{w^2+1}}dw \qquad \text{con } y \geq 0$$

Per definizione si pone:

$$\begin{aligned}
s &= \int_1^x \frac{1}{\sqrt{w^2-1}}dw = \operatorname{settcosh} x \qquad \text{con } 1 \leq x \\
s &= \int_0^y \frac{1}{\sqrt{w^2+1}}dw = \operatorname{settsinh} y \qquad \text{con } y \geq 0
\end{aligned} \tag{1}$$

Per la continuità già segnalata della funzione integrale si ha:

$$\operatorname{settcosh} 1 = \operatorname{settsinh} 0 = 0$$

Calcolando le derivate si ha:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\operatorname{settcosh} x &= \frac{ds}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{y} \\
\frac{d}{dy}\operatorname{settsinh} y &= \frac{ds}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} = \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

per cui le funzioni sono monotone crescenti. Il calcolo della derivata seconda mostra che esse sono concave. Una minorazione sugli integrali mostra che il limite a $+\infty$ vale $+\infty$. Pertanto esse sono un omeomorfismo su tutto l'intervallo $[0, +\infty[$. Le funzioni inverse, definite per ora con $s \geq 0$, si chiamano cosh e sinh. Invertendo (1) abbiamo le equazioni parametriche del ramo di iperbole nel primo quadrante:

$$\begin{cases} x = \cosh s \\ y = \sinh s \end{cases} \qquad s \geq 0$$

Le funzioni $\cosh s$ e $\sinh s$ sono crescenti per $s \geq 0$ perché inverse di funzioni crescenti. Poiché $x^2 - y^2 = 1$, $\operatorname{settcosh} 1 = \operatorname{settsinh} 0 = 0$, si ha:

$$\cosh^2 s - \sinh^2 s = 1, \qquad \cosh 0 = 1, \qquad \sinh 0 = 0$$

Derivate:

$$\begin{aligned} \frac{d\cosh s}{ds} &= \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dx}} = \sqrt{x^2-1} = y = \sinh s \\ \frac{d\sinh s}{ds} &= \frac{dy}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dy}} = \sqrt{y^2+1} = x = \cosh s \end{aligned}$$

Per l'esercizio (1) si ottiene:

$$\begin{cases} x = \cosh s = \frac{e^s+e^{-s}}{2} \\ y = \sinh s = \frac{e^s-e^{-s}}{2} \end{cases}$$

Si osservi che le espressioni scritte hanno significato anche per $s < 0$; $\cosh s$ risulta pari, $\sinh s$ risulta dispari. Pertanto $\sinh s$ è invertibile su tutto $\mathbb{R}$, mentre $\cosh s$ è invertibile per $s \geq 0$. Per i grafici si rimanda a [**DM 12.14**]. Come nel testo, dalla rappresentazione esplicita di $\cosh s$ e $\sinh s$ si ricava la rappresentazione esplicita di:

$$\begin{aligned} \operatorname{settcosh} x &= \log(x + \sqrt{x^2-1}) \qquad \text{con } x \geq 1 \\ \operatorname{settsinh} y &= \log(y + \sqrt{1+y^2}) \qquad \text{con } y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

È istruttivo ricavare le stesse formule da un altro punto di vista, lavorando sull'arco di iperbole nel primo quadrante. Ricordiamo che $\operatorname{settcosh} x$ ha per differenziale $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \frac{1}{y}dx$ mentre $\operatorname{settsinh} y$ ha per differenziale $\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}dy = \frac{1}{x}dy$. Utilizziamo la sostituzione di Eulero, intersecando l'arco di iperbole con un fascio di rette parallele all'asintoto $y = x - t$. Poiché $x \geq 1$ e $y \geq 0$ deve essere $0 \leq t \leq 1$. Cercando l'intersezione abbiamo:

$$\begin{cases} y^2 = x^2 - 2tx + t^2 \\ y^2 = x^2 - 1 \end{cases}$$

da cui $2tx = 1 + t^2$ e dunque:

$$\begin{cases} x = \frac{1+t^2}{2t} \\ y = \frac{1-t^2}{2t} \end{cases}$$

Se invertiamo, tenendo conto delle condizioni, otteniamo:

$$\begin{cases} t = x - \sqrt{x^2-1} \\ t = -y + \sqrt{y^2+1} \end{cases}$$

Integrando per sostituzione i differenziali $\frac{1}{y}dx$ e $\frac{1}{x}dy$ otteniamo:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y}dx &= \int \frac{2t}{1-t^2} d\left(\frac{1+t^2}{2t}\right) = \\ &= \int \frac{2t}{1-t^2}\,\frac{1+t^2}{2t}\,\frac{t^2-1}{t(1+t^2)}dt = \\ &= \int -\frac{1}{t}dt = -\log t\end{aligned}$$

Tornando a x si ottiene:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = -\log(x-\sqrt{x^2-1}) = \log(x+\sqrt{x^2-1})$$

Poiché la primitiva trovata vale 0 in 1, essa coincide effettivamente con $\operatorname{settcosh} x$. Analogamente si trova che:

$$\int \frac{1}{x}dy = \ldots = \int -\frac{1}{t}dt = -\log t$$

Tornando a y si ottiene:

$$\int \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}dy = -\log(-y+\sqrt{y^2+1}) = \log(y+\sqrt{y^2+1})$$

Poiché la primitiva trovata vale 0 in 0, essa coincide con $\operatorname{settsinh} y$.

BIBLIOGRAFIA

[DM] G. De Marco, *Analisi Uno*, Decibel-Zanichelli.