JACOBIANE

Umberto Marconi

Dipartimento di Matematica Pura e Applicata – Padova

1 Linguaggio

Se P e Q sono due punti di $\mathbb{R}^3$, posto $\vec{r} = P - Q$, la distanza di P da Q è data da:

$$|P - Q| = (\vec{r} \cdot \vec{r})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_q)^2 + (z_P - z_q)^2}$$

Si chiama sfera[1] *di centro Q e raggio ε l'insieme dei punti P la cui distanza da Q è minore o uguale di ε.*

Curve, volumi e porzioni di spazio sono collezioni di punti. Per *insiemi di punti* noi intendiamo la collezione di tutti i punti che sono assegnati da una legge o da una condizione ben definita, e solo questi punti.
Se i punti di un insieme E giacciono in un piano, E è detto un insieme *piano* di punti, e se i punti di E giacciono su una linea retta, E è detto un insieme *rettilineo* di punti.
Ovviamente un insieme piano o un insieme rettilineo di punti giace nello spazio tridimensionale, ed è qualche volta importante se tali insiemi sono considerati come parti dello spazio, o come parti del piano o come parti della retta in cui giacciono.
Un insieme di punti è detto *varietà lineare* passante per P_0 (anche in dimensione maggiore di 3) se è costituito da tutti i punti P tali che $P - P_0$ varia in un determinato sottospazio vettoriale.
Un insieme di punti è detto *limitato* se tutti i suoi punti stanno in una stessa sfera.
Un punto P è detto *punto limite*[2] di un insieme E se in ogni sfera di centro P ci sono punti di E diversi da P. Un punto limite può appartenere o non appartenere all'insieme.
Per esempio, se E consiste di tutti i punti all'interno di una data sfera, ma non della sua superficie, tutti i punti della sfera, compresi i punti della superficie, sono punti limite di E.
Gli insiemi finiti non hanno punti limite. D'altra parte un importante teorema, noto come *teorema di Bolzano-Weierstrass*, dice che *ogni insieme infinito e limitato di punti ha almeno un punto limite.*
Si chiama *derivato* di un insieme E, e si indica con il simbolo E', l'insieme dei punti limite di E. Così, se E è l'interno di una sfera, il derivato si ottiene aggiungendo la superficie.
Il derivato di un insieme finito è vuoto.
Un punto P di E è detto punto *interno* di E se esiste una sfera di centro P i cui punti appartengono tutti a E.
Un punto P di un insieme piano E è detto *punto interno di E rispetto al piano* (o semplicemente interno se non c'è confusione), se esiste un cerchio di centro P nel piano i cui punti appartengono tutti a E. Per esempio, se E consiste dei punti del piano (x, y) per cui $-a < x < a$, e $-a < y < a$, ognuno dei suoi punti è interno rispetto al piano; però nessuno dei suoi punti è interno se E è considerato come sottoinsieme dello spazio.

[1] In molti testi *palla*.
[2] O punto di accumulazione.

Un punto P di un insieme rettilineo di punti E è detto *un punto interno rispetto alla retta* se è punto medio di un segmento della retta, tutto contenuto in E.
Un punto P è detto *esterno* ad un insieme E se è centro di una sfera nessuno dei cui punti appartiene a E.
La *frontiera* di un insieme E è l'insieme dei punti che non sono né interni né esterni a E. Essa coincide con l'insieme dei punti che sono punti limite sia di E sia del complementare di E. Per esempio la frontiera di una sfera è la superficie sferica. Nello spazio la frontiera di un quadrato è costituita dai punti del quadrato e dai punti del bordo.
Un insieme si dice *chiuso* se contiene tutti i suoi punti limite.
Un insieme di punti si dice *aperto* se tutti i suoi punti sono interni.
L'insieme $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ è chiuso, mentre l'insieme $x^2 + y^2 + z^2 < a^2$ è aperto.
L'insieme dei punti che hanno almeno una coordinata razionale non è né aperto né chiuso.
Di solito la variabile indipendente di una funzione appartiene a un insieme di punti piuttosto particolare, che viene designato con i termini seguenti:

- un *dominio* (detto anche *aperto connesso*) è un insieme aperto tale che, comunque scelti due suoi punti, essi possono essere congiunti da una linea poligonale, con un numero finito di lati e tutta contenuta nell'insieme.
- un *intorno di un punto* è un dominio contenente il punto.
- una *regione* è un dominio, o un dominio con aggiunto qualche punto di frontiera. Una *regione chiusa* è una regione che contiene tutta la propria frontiera.
- La *chiusura* di un insieme di punti è l'insieme che si ottiene aggiungendo gli eventuali punti limite.

Per gli insiemi chiusi e limitati di $\mathbb{R}^3$ vale il seguente importantissimo teorema:

Teorema 1 (Heine-Borel) *Sia E un insieme chiuso e limitato di punti e sia S un insieme di aperti per cui ogni punto P di E appartiene a qualche aperto T_P di S. Allora esiste un sottoinsieme S' consistente di un* ***numero finito*** *di aperti T_P, tale che ogni punto di E appartiene a qualche aperto di S'.*

Nota 2 Il precedente teorema non si può estendere agli spazi di Hilbert di dimensione infinita senza rinforzare le ipotesi (precisamente, sostituendo *chiuso e limitato* con *sequenzialmente compatto*).

Usando il linguaggio degli intorni, le definizioni di limite finito e di funzione continua hanno le stesse formulazioni viste per funzioni reali di variabile reale.
Per le funzioni continue valgono alcuni importantissimi teoremi.

Teorema 3 *Se una funzione scalare è continua in tutti i punti di una regione chiusa e limitata, allora l'insieme dei valori assunti in questa regione è un sottoinsieme chiuso e limitato della retta reale; in particolare esistono il massimo assoluto e il minimo assoluto.*

Teorema 4 *Se una funzione scalare è continua in tutti i punti di una regione, allora l'insieme dei valori assunti è un intervallo della retta reale.*

2 L'ascissa curvilinea

Sia $y = f(x)$ una curva cartesiana di classe $\mathcal{C}^1$, che possiamo pensare come curva parametrica:

$$\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}$$

Osserviamo che il vettore di componenti

$$\left(\frac{dx}{dx}, \frac{dy}{dx}\right) = (1, f'(x))$$

è il vettore derivata prima della rappresentazione parametrica, ed è un vettore tangente alla curva nel punto (x, y).
Se $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ sono due punti della curva, sappiamo che la lunghezza dell'arco $\widehat{P_1P_2}$ è data da:

$$\text{lunghezza } \widehat{P_1P_2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

La lunghezza della corda P_1P_2 è:

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Fissiamo ora un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ sulla curva e sia $P = (x, y)$ la punta del raggio vettore $\vec{R}(x) = x\vec{\imath} + f(x)\vec{\jmath}$.
Indichiamo con $s(x)$ l'ascissa curvilinea, cioè la lunghezza dell'arco da P_0 a P.
Quando x subisce un incremento positivo Δx, arriviamo al punto $Q = (x + \Delta x, y + \Delta y)$, ove $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
Il raggio vettore con la punta in Q è[3]:

$$\vec{R}(x + \Delta x) = (x + \Delta x, y + \Delta y).$$

Il vettore corda da P a Q è:

$$\Delta\vec{R} = \vec{R}(x + \Delta x) - \vec{R}(x) = \Delta x\,\vec{\imath} + \Delta y\,\vec{\jmath}$$

L'incremento vettoriale lungo la retta tangente è:

$$d\vec{R} = \Delta x\,\vec{\imath} + f'(x)\Delta x\,\vec{\jmath}$$

La lunghezza dell'arco da P a Q è:

$$\text{lunghezza } \widehat{PQ} = \Delta s = s(x + \Delta x) - s(x) = \int_{x}^{x+\Delta x} \sqrt{1 + (f'(\xi))^2}\, d\xi$$

Il teorema della media integrale assicura che esiste un valore $\xi^* \in [x, x + \Delta x]$ tale che:

$$\Delta s = \sqrt{1 + (f'(\xi^*))^2}\Delta x$$

La corda di estremi P e Q ha lunghezza:

$$|\Delta\vec{R}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\Delta x$$

Per il teorema di Lagrange esiste un elemento $\eta \in [x, x + \Delta x]$ tale che:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(\eta)$$

[3] Fare un disegno, indicando anche il vettore differenza $\vec{R}(x + \Delta x) - \vec{R}(x)$.

per cui:

$$|\Delta\vec{R}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + (f'(\eta))^2}\Delta x$$

Facciamo ora il rapporto fra la lunghezza della corda e la lunghezza dell'arco:

$$\frac{|\Delta\vec{R}|}{\Delta s} = \frac{\sqrt{1 + (f'(\eta))^2}\Delta x}{\sqrt{1 + (f'(\xi^*))^2}\Delta x}$$

Siccome ξ ed η tendono a x quando $\Delta x \to 0$, si ha:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta\vec{R}|}{\Delta s} = 1 \tag{1}$$

Pertanto $|\Delta\vec{R}|$ e Δs sono asintotici, cioè:

> *la lunghezza della corda e la lunghezza dell'arco sono asintotiche quando gli estremi si avvicinano indefinitamente, vale a dire:*
>
> $$\Delta s \sim \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Grazie a questa asintoticità, possiamo dire che il *triangolo differenziale* che ha per lati Δx, Δy e l'archetto $\widehat{PQ}$ ha le stesse proprietà del triangolo che ha per lati Δx, Δy e la corda $\overline{PQ}$. Ricordiamo che il vettore corda $\Delta\vec{R} = \Delta x\,\vec{\imath} + \Delta y\vec{\jmath}$ e il vettore tangente $d\vec{R} = \Delta x\vec{\imath} + f'(x)\Delta x\,\vec{\jmath}$
sono asintotici, nel senso che la loro differenza è un infinitesimo superiore a Δx.
Pertanto il vettore $\Delta\vec{R}$ assume la direzione della retta tangente e la sua lunghezza è asintotica alla lunghezza d'arco al tendere a 0 dell'incremento Δx.
Ricordando che se due infinitesimi sono asintotici allora i differenziali sono uguali, otteniamo:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

L'elemento ds si chiama *differenziale d'arco* o *differenziale di linea.*
Osserviamo che il differenziale d'arco coincide con la lunghezza del vettore derivata prima moltiplicata per il differenziale della variabile indipendente. Il vettore derivata prima, che è $\vec{\imath} + f'(x)\vec{\jmath}$, può essere disegnato come il segmento orientato tangente alla curva che va dal punto (x, y) al punto $(x + 1, y + f'(x))$.
Naturalmente:

$$\text{lunghezza } \widehat{P_1P_2} = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

vecchia formula che ci dice che la lunghezza dell'arco percorso è l'integrale della velocità scalare.
Il limite (1) ha un'importante conseguenza sul vettore tangente $\frac{d\vec{R}}{ds}$, derivata della curva rispetto all'ascissa curvilinea. Dimostriamo che tale vettore derivata è un versore:

$$\left|\frac{d\vec{R}}{ds}\right| = \left|\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{R}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta\vec{R}|}{\Delta s} = 1$$

Le considerazioni precedenti si estendono a una curva parametrica nel piano o nello spazio[4]:

$$\vec{R}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$

Omettiamo la dimostrazione, che non è facile, ma ricapitoliamo le analoghe considerazioni.
Detti P_0 la punta del raggio vettore $\vec{R}(t_0)$ e P la punta del raggio vettore $\vec{R}(t)$, chiamiamo $s(t)$ l'ascissa curvilinea dell'arco da P_0 a P, intesa come limite[5] delle lunghezze delle

[4] Per la definizione del vettore derivata prima di una funzione vettoriale si veda [**S, 17.4**].
[5] Estremo superiore.

poligonali finite con vertici successivi da P_0 a P nel verso crescente del parametro.
Se facciamo subire a t un incremento infinitesimo positivo Δt, arriviamo alla punta del raggio vettore $\vec{R}(t+\Delta t)$. L'incremento

$$\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$$

è la lunghezza dell'arco da P a Q, mentre

$$|\Delta \vec{R}| = |\vec{R}(t+\Delta t) - \vec{R}(t)| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

è la lunghezza della corda di estremi P e Q. Anche in questo caso le lunghezze dell'arco e della corda sono asintotiche quando $\Delta t \to 0$ e passando ai differenziali si ottiene la formula per il differenziale d'arco:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$$

Ancora una volta il differenziale d'arco si ottiene moltiplicando la lunghezza del vettore derivata prima (velocità scalare) per il differenziale della variabile indipendente.

Se P_1e P_2 sono le punte dei vettori $\vec{R}(t_1)$ e $\vec{R}(t_2)$, con $t_2 > t_1 > t_0$, chiamando $s_1 = s(t_1)$ e $s_2 = s(t_2)$, abbiamo ovviamente:

$$\text{lunghezza } \widehat{P_1P_2} = s_2 - s_1 = \int_{s_1}^{s_2} ds$$

Se facciamo il cambiamento di variabile $s = s(t)$ otteniamo:

$$s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{ds}{dt}\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

che è la formula per il calcolo della lunghezza di una curva.

Se il vettore tangente $\frac{d\vec{R}}{dt}$ è non nullo, allora $\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| > 0$ e dunque:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| dt$$

è una biiezione strettamente crescente fra intervalli della retta reale; essa ammette un'inversa $t = t(s)$, che permette di parametrizzare la curva con l'ascissa curvilinea:

$$\vec{R}(s) = \vec{R}(t(s))$$

ove la punta del vettore $\vec{R}(s)$ coincide con il punto della curva che ha ascissa curvilinea uguale a s. Con questa parametrizzazione il parametro **è** già la lunghezza della curva.
Poiché

$$s_2 - s_1 = \int_{s_1}^{s_2} ds \quad \text{e} \quad s_2 - s_1 = \int_{s_1}^{s_2} \left|\frac{d\vec{R}}{ds}\right| ds$$

derivando rispetto a s_2 si ottiene:

$$\left|\frac{d\vec{R}}{ds}\right| = 1$$

Di conseguenza la derivata della parametrizzazione rispetto all'ascissa curvilinea è il *versore* tangente nel verso di percorrenza della curva, indicato con

$$\vec{T} = \frac{d\vec{R}}{ds}$$

Poiché $\vec{T} \cdot \vec{T} = 1$ costantemente, derivando otteniamo:

$$\vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = 0 \qquad (2)$$

e quindi $\frac{d\vec{T}}{ds}$ è un vettore *normale* alla curva. Se indichiamo con $\vec{N}$ il versore associato, come per le curve piane abbiamo:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \vec{N}k = \vec{N}\frac{1}{\rho}$$

ove k è la curvatura (in valore assoluto) e ρ è il raggio di curvatura.
Il versore $\vec{N}$ si chiama *normale principale* alla curva e punta sempre verso la parte concava della curva. Fare un disegno tenendo conto che $\frac{d\vec{T}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{T}(s+\Delta s)-\vec{T}(s)}{\Delta s}$ e che $\vec{T}$ è un versore tangente alla curva che punta nel verso di percorrenza.

Nota 5 La formula (2) consegue dalla regola di derivazione per un prodotto scalare di due funzioni vettoriali:

$$\frac{d(\vec{R} \cdot \vec{S})}{dt}) = \frac{d\vec{R}}{dt} \cdot \vec{S} + \vec{R} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt}$$

La dimostrazione si ottiene in modo analogo alla dimostrazione per la regola di Leibniz.
Dimostriamo ora la (2).
Da $\vec{T} \cdot \vec{T} = 1$ derivando si ha $\frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{T} + \vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = 0$.

Esercizio. Dato il circolo $x^2 + y^2 = r^2$, scrivere il differenziale d'arco ds in funzione dell'ascissa x, senza esplicitare l'equazione. Esprimere poi l'ascissa curvilinea mediante un'espressione integrale di x, partendo dal punto $(0, r)$ in senso orario. Cosa salta fuori?

Per maggior chiarezza riportiamo da [**S1**] la definizione di curvatura per una curva cartesiana. Per la definizione generale di curvatura si veda [**S**, **17.5**].

La représentation la plus naturelle de la déformation d'une **courbe** s'**obtient en examinant les** variations de l'angle α compris entre la tangente et l'axe OX lorsqu'on se déplace le long de la

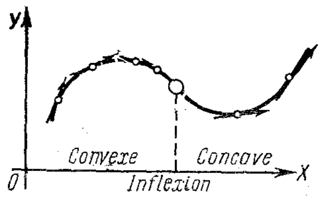

Fig. 76

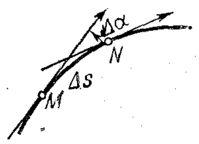

Fig. 77

courbe. De deux arcs de courbe de même longueur Δs la plus incurvée sera celle dont la tangente tournera le plus, c'est-à-dire celle pour laquelle l'accroissement $\Delta\alpha$ sera le plus grand. Ces considérations nous conduisent à la notion de courbure moyenne de Δs et de courbure en un point donné: *la courbure moyenne de l'arc Δs est la valeur absolue du rapport de l'angle $\Delta\alpha$ compris entre les tangentes aux extrémités de l'arc à la longueur Δs de l'arc. La limite de ce rapport lorsque Δs tend vers zéro est la courbure de la courbe au point considéré* (fig. 77).

De sorte que la courbure C s'écrit:

$$C = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| .$$

Mais $\operatorname{tg}\alpha$ est la dérivée première y', donc

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} y',$$

d'où en différentiant par rapport à x la fonction de fonction arc tg y' :

$$d\alpha = \frac{y''}{1+y'^2}\,dx.$$

Mais nous venons de démontrer que

$$ds = \pm\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

En divisant $d\alpha$ par ds, on obtient l'expression définitive de la courbure :

$$C = \pm\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}. \tag{5}$$

Sur les parties convexes il faut prendre le signe (—) tandis que sur les parties concaves il faut prendre le signe (+) ; ainsi C sera toujours positif.

Aux points de la courbe où soit y' soit y'' n'existent pas, il n'y a pas non plus de courbure. Au voisinage des points où y'' s'annule la courbure devient nulle et la courbe tend vers une droite. Ceci se produira par exemple au voisinage des points d'inflexion.

Supposons que les coordonnées x, y des points de la courbe s'expriment au moyen de la longueur de l'arc s. Dans ce cas, nous avons vu que :

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \sin\alpha = \frac{dy}{ds}.$$

L'angle α sera aussi une fonction de s, et en dérivant par rapport à s les égalités écrites, nous avons :

$$-\sin\alpha\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \cos\alpha\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d^2y}{ds^2}.$$

En élevant au carré et en additionnant ces deux égalités, il vient:

$$\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2,$$

ou

$$C^2 = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2,$$

d'où

$$C = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}.$$

L'inverse de la courbure de C : $\frac{1}{C}$ s'appelle *le rayon de courbure*. D'où pour le rayon de courbure R on aura, en vertu de (5), l'expres-

180 CH. II. NOTION DE DÉRIVÉE. APPLICATIONS

sion suivante:

$$R = \left| \frac{ds}{d\alpha} \right| = \pm \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}, \tag{6}$$

soit

$$R = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}},$$

et on prend la valeur positive de la racine.

Dans le cas d'une droite y est un polynôme du premier degré en x et, par conséquent, y'' est identiquement nulle, c'est-à-dire

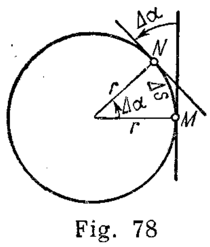

Fig. 78

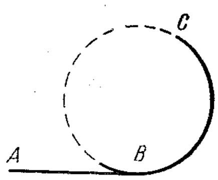

Fig. 79

que tout le long de la droite la courbure est nulle et le rayon de courbure est infini.

Dans le cas d'un cercle de rayon r il est évident que (fig. 78):

$$\Delta s = r\,\Delta\alpha \quad \text{et} \quad R = \lim \frac{\Delta s}{\Delta\alpha} = r,$$

c'est-à-dire que le rayon de courbure est constant tout le long du cercle. Par la suite nous verrons que seul le cercle présente cette propriété.

Notons que les variations du rayon de courbure ne sont pas aussi sensibles que celles de la tangente. Examinons une ligne formée d'un segment de droite AB et d'un arc de cercle BC tangent au segment au point B (fig. 79). Sur AB le rayon de courbure est infini, sur BC il est égal au rayon r du cercle, et au point B il présente une discontinuité, alors que la direction de la tangente varie de façon continue. On explique ainsi les secousses des wagons dans les virages. Supposons que la vitesse v des wagons reste constante. On sait de la mécanique que la force sera dirigée suivant la normale à la trajectoire et que son intensité sera $m\frac{v^2}{R}$, où m est la masse du corps en mouvement et R le rayon de courbure de la trajectoire. On voit alors qu'aux points où il y a discontinuité du rayon de courbure il y aura discontinuité de la force, d'où apparition de secousses.

II-5-3. Asymptotes. Passons maintenant à l'étude *des branches infinies* des courbes où l'une des coordonnées x ou y ou les deux ensemble croissent indéfiniment. L'hyperbole et la parabole nous donnent des exemples de courbes à branches infinies.

Nel seguente esempio, tratto da [**SIE**], si trova un'espressione dell'ascissa curvilinea della lemniscata. Segue l'elica cilindrica da [**S2**].

1

Elliptic Functions

1. Doubling the arc of a lemniscate

The theory of elliptic functions developed in the 19th century has a long history. It begins with a discovery, which we are about to discuss, of a remarkable property of the arc of a lemniscate made in 1718 by the Italian count Fagnano.

As is well known, a lemniscate is the locus of a point $\mathfrak{y}$ in a plane such that the product of its distances from two fixed points has constant value c^2. Let $2a$ be the fixed distance between the two fixed points $\mathfrak{y}_1$ and $\mathfrak{y}_2$. We choose a rectangular coordinate system in which the points $\mathfrak{y}_1$ and $\mathfrak{y}_2$ have coordinates $(-a, 0)$ and $(a, 0)$. If r_1, r_2, and r are the distances from a point $\mathfrak{y}$ on the lemniscate with coordinates (x, y) to $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$, and the origin (Figure 1), then

$$r^2 = x^2 + y^2 \tag{1}$$

and

$$r_1^2 = (x + a)^2 + y^2 = r^2 + a^2 + 2ax,$$

$$r_2^2 = (x - a)^2 + y^2 = r^2 + a^2 - 2ax.$$

If we multiply the last two equations and bear in mind that $r_1 r_2 = c^2$, then we obtain

$$r^4 + 2a^2r^2 + a^4 - 4a^2x^2 = c^4. \tag{2}$$

By varying the value of c we obtain a class of lemniscates. In this class we consider the lemniscates which pass through the origin and have the form of a horizontal figure 8. This means that $c = a$. It is convenient to put $2a^2 = 1$. Then the distance between the points $\mathfrak{y}_1$ and $\mathfrak{y}_2$ is $\sqrt{2}$ and the equation (2) becomes

$$2x^2 = r^2 + r^4. \tag{3}$$

Using (1) to eliminate x from (3) we obtain

$$2y^2 = r^2 - r^4. \tag{4}$$

After extraction of roots, (3) and (4) yield a parametric representation of the lemniscate with radius vector r as parameter.

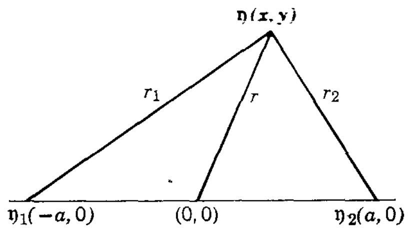

Figure 1

We shall now compute the length of an arc of the lemniscate. Since the curve is symmetric with respect to both coordinate axes, we can restrict ourselves to an arc from the origin to a point in the first quadrant (Figure 2). In order to compute the corresponding arc length s, we regard r as an independent variable which varies over the interval $0 \leq r \leq 1$. (We use a dot to denote differentiation with respect to r.) In view of (3) and (4) we have

$$2x\dot{x} = r + 2r^3,$$
$$2y\dot{y} = r - 2r^3,$$

$$(2xy)^2\dot{s}^2 = (2xy)^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = y^2(r + 2r^3)^2 + x^2(r - 2r^3)^2$$
$$= \frac{r^2 - r^4}{2}(r^2 + 4r^4 + 4r^6) + \frac{r^2 + r^4}{2}(r^2 - 4r^4 + 4r^6) = r^4;$$

further,

$$(2xy)^2 = (r^2 + r^4)(r^2 - r^4) = r^4(1 - r^4),$$

so that

$$(1 - r^4)\dot{s}^2 = 1, \qquad \frac{ds}{dr} = \frac{1}{\sqrt{1 - r^4}}.$$

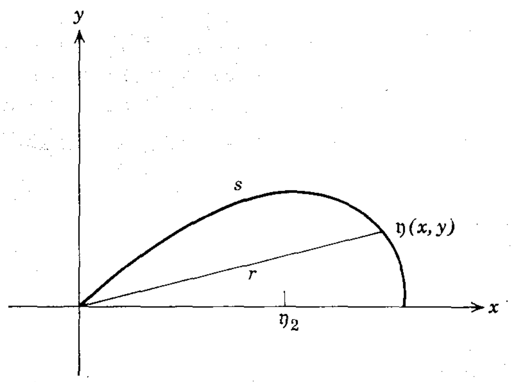

Figure 2

If, beginning at the origin, we trace the arc of the lemniscate through the entire first quadrant, then r takes on every value in the internal $(0, 1)$ exactly once. Integration yields the relation

(5)

$$s = s(r) = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - r^4}} \qquad (0 \leq r \leq 1),$$

where we take the positive square root in the integrand.

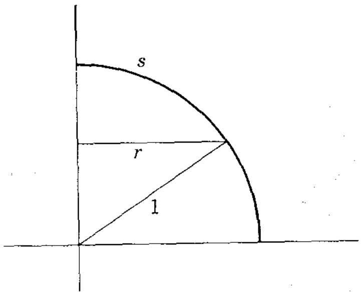

Figure 3

V-1-7. **Hélices.** Soit un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe OZ et soit (l) sa directrice dans le plan XOY (fig. 105). On considère la longueur de l'arc σ de la courbe (l) calculée du point A d'intersection de cette courbe avec l'axe OX dans une direction déterminée, et on suppose que l'équation de la directrice est

$$x = \varphi(\sigma), \quad y = \psi(\sigma). \tag{32}$$

On porte sur (l) un arc $AN = \sigma$ et soit le segment $NM = k\sigma$ parallèle à l'axe OZ, k étant un coefficient numérique déterminé (pas de vis). Le lieu géométrique des points M donne l'hélice (L) tracée sur le cylindre. Les équations paramétriques de cette ligne sont évidemment

$$x = \varphi(\sigma), \quad y = \psi(\sigma), \quad z = k\sigma. \tag{33}$$

Soit s l'abscisse curviligne de la courbe (L) comptée à partir du point A. On a :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 =$$
$$= [\varphi'^2(\sigma) + \psi'^2(\sigma) + k^2]\, d\sigma^2.$$

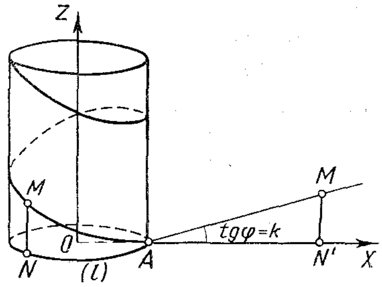

Fig. 105

Mais $\varphi'(\sigma)$ et $\psi'(\sigma)$ sont égaux au cosinus et au sinus de l'angle formé par la tangente à la courbe (l) avec l'axe OX (tome I, [II-5-1]), c'est pourquoi $\varphi'^2(\sigma) + \psi'^2(\sigma) = 1$ et on peut mettre la formule précédente sous la forme

$$ds = \sqrt{1 + k^2}\, d\sigma,$$

d'où

$$s = \sqrt{1 + k^2}\, \sigma.$$

Le cosinus de l'angle formé par la tangente à (L) avec l'axe OZ est :

$$\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{ds} = \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}},$$

c'est la *première propriété de l'hélice*: *les tangentes à l'hélice forment un angle constant avec une certaine direction fixe.*

Soit la troisième des formules (28). Elle donne

$$0 = \frac{\gamma_1}{\rho} \quad \text{ou} \quad \gamma_1 = 0$$

et, par conséquent, la normale principale de l'hélice est perpendiculaire à l'axe OZ, c'est-à-dire à la génératrice du cylindre. Mais d'autre part, elle est également perpendiculaire à la tangente à l'hélice. On remarque aisément que la génératrice du cylindre et la tangente à l'hélice déterminent le plan tangent au cylindre au point choisi sur l'hélice, et il résulte de ce qui précède que la normale principale de l'hélice est perpendiculaire à ce plan tangent. On a ainsi la *seconde propriété de l'hélice: la normale principale à une hélice coïncide en tous ses points avec la normale au cylindre sur lequel est tracée cette hélice.*

Soit maintenant les cosinus γ, γ_1, γ_2 des angles formés par l'axe OZ avec les directions du trièdre mobile de l'hélice. Etant donné que $\gamma^2+\gamma_1^2+\gamma_2^2=1$ et que γ et γ_1 sont des constantes, comme on l'a déjà vu, on en déduit que γ_2 est aussi une constante. La troisième des formules (28_2) donne dans le cas présent $\frac{\gamma}{\rho}+\frac{\gamma_2}{\tau}=0$, d'où on voit que le rapport $\frac{\rho}{\tau}$ est une grandeur constante; ainsi, on a la *troisième propriété de l'hélice: le long de l'hélice le rapport du rayon de courbure au rayon de torsion est une constante.* Soit r le rayon de courbure de la courbe plane (l). En tenant compte de ce que le carré de la courbure est égal à la somme des carrés des dérivées secondes des coordonnées par rapport à la longueur de l'arc, on peut écrire

$$\frac{1}{r^2}=\varphi''^2(\sigma)+\psi''^2(\sigma)$$

et

$$\frac{1}{\rho^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2=\left[\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right)^2\right]\frac{1}{(1+k^2)^2},$$

d'où

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{\varphi''^2(\sigma)}{(1+k^2)^2}+\frac{\psi''^2(\sigma)}{(1+k^2)^2}=\frac{1}{(1+k^2)^2\,r^2}$$

soit $\rho=(1+k^2)\,r$, c'est-à-dire que le rayon de courbure de l'hélice ne diffère du rayon de courbure dans un point correspondant de (l) que par un facteur constant. Si le cylindre est circulaire, c'est-à-dire si la directrice (l) est une circonférence, r est constant et, par conséquent, ρ est aussi constant; mais alors, d'après la troisième propriété, τ est lui aussi constant, c'est-à-dire qu'une *hélice construite sur un cylindre circulaire a sa courbure et sa torsion constantes.*

En conclusion, on va citer encore une importante propriété des hélices. Si l'on prend deux points sur un cylindre, la plus courte distance entre ces deux points sur le cylindre sera donnée par l'hélice passant par ces deux points. Sous ce rapport, les hélices sur un cylindre sont l'équivalent des droites dans les plans. On exprime généralement cette propriété en disant que les *hélices sont les géodésiques d'un cylindre. On appelle généralement géodésiques d'une surface les lignes donnant la plus courte distance entre deux points de la surface.*

Si on déroule le cylindre sur le plan XOZ, en le dépliant autour de sa génératrice passant par le point A, étant donné que le rapport de l'arc AN au segment NM conserve une valeur constante $\frac{1}{k}$, l'hélice, sur le plan, est une droite. Dans ce cas, du développement d'un cylindre sur un plan, les longueurs sont conservées et la propriété de l'hélice mentionnée plus haut (donner la plus courte distance sur le cylindre) devient évidente. Cette propriété est liée à la deuxième propriété de l'hélice, à savoir que les normales principales à une hélice coïncident avec les normales à un cylindre. En géométrie, on démontre en général que les *normales principales à une géodésique sur une surface quelconque coïncident avec les normales à cette surface.*

3 Il differenziale in più variabili

Nel seguito punti e vettori saranno indicati a volte usando un unico simbolo letterale, a volte mediante le coordinate. Lo studente svolga il paziente esercizio di trascrivere le formule in entrambi i modi.

Sia $w = f(P)$ una funzione scalare continua e con derivate parziali continue, definita per P appartenente a un certo dominio D dello spazio. Indicando con (x, y, z) le coordinate del punto variabile P, la funzione f si scrive anche nella forma $w = f(x, y, z)$. La derivata parziale rispetto alla prima variabile si scrive con uno dei simboli:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{\partial w}{\partial x}$$

(analogamente per le altre variabili).

Esempio 6 Spesso si ha a che fare con un'equazione in cui una delle variabili si può esplicitare come funzione delle altre due, che devono allora essere considerate come variabili indipendenti. Se esaminiamo l'equazione di Clapeyron (ove R è costante):

$$pv = RT$$

possiamo ottenere la tabella seguente:

variabili indipendenti	T, p	T, v	p, v
funzioni	$v = \frac{RT}{p}$	$p = \frac{RT}{v}$	$T = \frac{pv}{R}$
derivate parziali	$\frac{\partial v}{\partial T} = \frac{R}{p}$ $\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{RT}{p^2}$	$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{v}$ $\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{RT}{v^2}$	$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{v}{R}$ $\frac{\partial T}{\partial v} = -\frac{p}{R}$

da cui la relazione:

$$\frac{\partial v}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial v} = -1$$

Se[6] $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ è il simbolo di Hamilton, si ha l'espressione per il gradiente:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Se necessario, bisogna scrivere la variabile indipendente:

$$(\nabla f)(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P), \frac{\partial f}{\partial z}(P)\right)$$

Al posto di $(\nabla f)(P)$ scriveremo $\nabla f(P)$.
Fissato un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, l'incremento della variabile dipendente è:

$$\Delta w = f(P) - f(P_0)$$

Se consideriamo invece la varietà lineare tangente al grafico $w = f(x, y, z)$ nel punto $(P_0, f(P_0))$, essa ha equazione:

$$w = f(P_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)(z - z_0)$$

ovvero

$$w = g(P) = f(P_0) + (\nabla f(P_0)) \cdot (P - P_0)$$

In questo secondo caso[7] l'incremento di w è dato da:

$$dw = g(P) - f(P_0) = (\nabla f(P_0)) \cdot (P - P_0)$$

Osserviamo che la funzione della variabile P definita da $(\nabla f(P_0)) \cdot (P - P_0)$ è lineare rispetto al vettore $P - P_0$; inoltre $\nabla f(P_0)$ non è altro che la matrice riga associata a questa applicazione lineare scalare.

[6] leggi *nabla*, dal nome di un antico strumento musicale ebraico.
[7] Poiché $g(P_0) = f(P_0)$

Definizione 7 *L'applicazione lineare in $(P - P_0)$ definita da*

$$\nabla f(P_0) \cdot (P - P_0)$$

si chiama differenziale di f in P_0 e si indica con il simbolo $df(P_0)$. Possiamo dire che $df(P_0)$ è quell'applicazione lineare per cui

$$dw = df(P_0).(P - P_0)$$

rappresenta l'incremento lungo la varietà lineare tangente[8]*.*

Il seguente teorema, che non dimostriamo, si chiama *teorema del differenziale totale.*

Teorema 8 *Se f e le sue derivate parziali prime sono continue, esiste una funzione σ, infinitesima per $P \to P_0$, tale che:*

$$f(P) = f(P_0) + df(P_0).(P - P_0) + \sigma|P - P_0|$$

Se scriviamo con le coordinate, esistono tre funzioni scalari σ_1, σ_2, σ_3, infinitesime per $P \to P_0$, tali che:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) =& f(x_0,y_0,z_0)+ \\ &+ \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0) + \left(\tfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0) + \left(\tfrac{\partial f}{\partial z}\right)_{(x_0,y_0,z_0)}(z-z_0)+ \\ &+ \sigma_1(x-x_0) + \sigma_2(y-y_0) + \sigma_3(z-z_0) \end{aligned} \tag{3}$$

Dato che nella formula (3) il punto P_0 è scelto arbitrariamente, possiamo sostituirlo con $P = (x, y, z)$ e indicare il punto variabile con

$$P + dP = (x + dx, y + dy, z + dz)$$

in modo che le variabili diventino gli incrementi:

$$\begin{aligned} & f(x+dx, y+dy, z+dz) - f(x,y,z) = \\ = & \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x,y,z)} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x,y,z)} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{(x,y,z)} dz + \sigma_1 dx + \sigma_2 dy + \sigma_3 dz \end{aligned}$$

Tralasciando l'argomento (x, y, z) delle funzioni e chiamando Δw l'incremento di f corrispondente agli incrementi (dx, dy, dz), otteniamo:

$$\Delta w = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \sigma_1 dx + \sigma_2 dy + \sigma_3 dz$$

Per quanto spiegato nella definizione 7, il termine lineare in $dP = (dx, dy, dz)$

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = (\nabla f) \cdot dP \tag{4}$$

si chiama *differenziale* della funzione f (ovvero della variabile dipendente w) e rappresenta la parte lineare dell'incremento Δw.
Con questi simboli la formula (3) si può riscrivere:

$$\Delta w = dw + \sigma_1 dx + \sigma_2 dy + \sigma_3 dz$$

[8] Se f è funzione di due variabili reali, la varietà lineare tangente è il piano tangente.

Esempio 9 Se $w = w(x, y, z, t)$ è funzione delle tre variabili posizionali e del tempo, il differenziale è:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz + \frac{\partial w}{\partial t}dt \tag{5}$$

Supponiamo che le coordinate posizionali (x, y, z) descrivano il punto dell'orbita di una particella, e quindi siano funzioni del tempo t. Allora w è funzione della sola t e la derivata totale rispetto a t si ottiene dividendo formalmente per dt la formula (5):

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

Non bisogna confondere la derivata totale $\frac{dw}{dt}$ con $\frac{\partial w}{\partial t}$, che è la derivata parziale rispetto alla componente.
Se w è la densità di un fluido in movimento e $\frac{\partial w}{\partial t}$ è identicamente nulla, ciò significa che la densità nei vari punti è indipendente dal tempo e dipende solo dalla posizione. Se invece $\frac{dw}{dt} = 0$ identicamente, allora il fluido è incomprimibile (può essere composto da uno strato di olio e da uno strato di acqua).

Quanto abbiamo detto può essere ripetuto per funzioni a valori vettoriali:

$$\vec{F} = \vec{F}(P)$$

a valori in $\mathbb{R}^3$.
In tal caso indichiamo con (x, y, z) le coordinate della variabile indipendente P e con (X, Y, Z) le coordinate della variabile dipendente $\vec{F}$.
La funzione $\vec{F}$ si può scrivere con le tre equazioni:

$$\begin{cases} X = X(x, y, z) \\ Y = Y(x, y, z) \\ Z = Z(x, y, z) \end{cases} \tag{6}$$

Noi assumiamo che le tre funzioni componenti $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ siano continue con derivate parziali continue.

Esempio 10 Sia $Q(\xi, \eta, \zeta)$ un punto fissato. Il campo scalare:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|P - Q|}$$

è il potenziale elettrostatico in P generato da una carica unitaria in Q. Con le coordinate si ha:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}}$$

Se calcoliamo l'opposto del gradiente, otteniamo il campo elettrostatico:

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|P - Q|^2}\frac{P - Q}{|P - Q|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P - Q}{|P - Q|^3}$$

Ponendo $\vec{E} = (X, Y, Z)$ si ha:

$$\begin{cases} X = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x-\xi}{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ Y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y-\eta}{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ Z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z-\zeta}{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

ove il dominio è costituito dai punti diversi da Q.
Si osservi che il campo elettrostatico ha una singolarità non eliminabile in Q, nel senso che:

$$\lim_{P\to Q}|\vec{E}(P)| = \lim_{P\to Q}\frac{1}{|P-Q|^2} = +\infty$$

Esercizio. Si ponga $\vec{r} = P - Q$, $r = |P - Q|$ e $\vec{\nu} = \frac{\vec{r}}{r}$.
Se $V(P)$ è il potenziale elettrostatico dell'esempio, dimostrare che:

a) $P = Q + r\vec{\nu}$;

b) $V(Q + r\vec{\nu}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$;

c) $\left(\frac{\partial V}{\partial \vec{\nu}}\right)_P = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{Q+r\vec{\nu}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$;

d) $\lim\limits_{P\to Q}|P-Q|^2 V(P) = 0$;

e) $\lim\limits_{P\to Q}|P-Q|^2\left(\dfrac{\partial V}{\partial \vec{\nu}}\right)_P = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

Dal punto *b*) si ottiene che in coordinate sferiche il potenziale $V(r)$ è la funzione $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

Torniamo ora alla (6). Possiamo calcolare i gradienti delle componenti ottenendo:

$$\begin{cases} \nabla X = \left(\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial X}{\partial z}\right) \\ \nabla Y = \left(\frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial y}, \frac{\partial Y}{\partial z}\right) \\ \nabla Z = \left(\frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial y}, \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \end{cases}$$

Se calcoliamo invece le derivate parziali della funzione vettoriale $\vec{F}$ otteniamo:

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial y} \\ \frac{\partial Z}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

La matrice che ha per righe i gradienti delle componenti e per colonne le derivate parziali della funzione vettoriale $\vec{F}$ si chiama *matrice jacobiana* di $\vec{F}$. Scriviamola, tralasciando di indicare la variabile indipendente P:

$$\mathcal{J}\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Fissato P_0, la matrice $\mathcal{J}\vec{F}(P_0)$ è la matrice di un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$, che lavora sul vettore $P - P_0$ al solito modo *righe per colonna*.
Anche qui si chiama *differenziale* di $\vec{F}$ in P_0 l'applicazione lineare $d\vec{F}(P_0)$ individuata dalla matrice jacobiana $\mathcal{J}\vec{F}(P_0)$. L'espressione $df(P_0)(P - P_0)$ significa *l'applicazione lineare* $df(P_0)$ *applicata al vettore* $(P - P_0)$, cioè il prodotto righe per colonne della matrice jacobiana per il vettore colonna $(P - P_0)$.

Sussiste la stessa proprietà descritta per le funzioni scalari, cioè esiste una funzione vettoriale $\vec{\sigma}$, infinitesima per $P \to P_0$, tale che:

$$\vec{F}(P) = \vec{F}(P_0) + d\vec{F}(P_0)(P - P_0) + \vec{\sigma}|P - P_0|$$

In $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ la varietà lineare

$$\vec{W} = \vec{F}(P_0) + d\vec{F}(P_0)(P - P_0)$$

è la varietà lineare tangente nel punto $(P_0, \vec{F}(P_0))$ al grafico $\vec{W} = \vec{F}(P)$.

Esercizio. Riscrivere le ultime formule componente per componente, usando la matrice jacobiana.

Esercizio. Scrivere le matrici jacobiane della trasformazione coordinate polari, della trasformazione coordinate cilindriche e della trasformazione coordinate sferiche. Calcolarne poi i relativi determinanti.

4 Matrice Hessiana

Sia $f(P) = f(x, y)$ una funzione scalare di classe $\mathcal{C}^1$ di due variabili reali.
Il gradiente di f

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath}$$

diventa al variare di P una funzione a valori vettoriali.
Consideriamo ora il differenziale del gradiente di f, che sia chiama anche *differenziale secondo* di f. La matrice jacobiana del differenziale di f si chiama *matrice hessiana* di f. Essa ha per colonne le derivate parziali del differenziale:

$$H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Nelle componenti della matrice abbiamo tralasciato la variabile indipendente (x, y).
Si osservi che la matrice hessiana è simmetrica e può essere pensata come la matrice di una forma quadratica. Ricordiamo che ogni matrice simmetrica è ortogonalmente simile a una matrice diagonale. Scriviamo ora come lavora questa forma quadratica sull'incremento vettoriale $\Delta P = h\vec{\imath} + k\vec{\jmath}$:

$$(h, k) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

Facendo il conto, la forma quadratica in (h, k) diventa:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2 \tag{7}$$

Per capire il senso dell'espressione ottenuta dobbiamo considerare la funzione

$$\varphi(t) = f(x + th, y + tk)$$

ottenuta calcolando f lungo la retta $P + t\Delta P$. Calcoliamo $\varphi'(t)$ e $\varphi''(t)$:

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d(x + th)}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{d(y + tk)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k$$

ove $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono calcolate in $(x+th, y+tk)$.

$$\begin{aligned}
\varphi''(t) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{d(x+th)}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{d(y+th)}{dt}\right)h + \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{d(x+th)}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{d(y+th)}{dt}\right)k = \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}k\right)h + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}h + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k\right)k = \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2
\end{aligned}$$

Abbiamo riottenuto l'espressione (7), ma calcolata in $(x+th, y+tk)$.
Scriviamo ora la formula di Taylor con resto di Lagrange per la funzione φ, con punto iniziale $t=0$ e punto finale $t=1$:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0)\cdot 1 + \frac{1}{2!}\varphi''(\vartheta)\cdot 1 \tag{8}$$

per un opportuno numero ϑ compreso tra 0 e 1. Ora:

$$\varphi(0) = f(x,y), \qquad \varphi(1) = f(x+h, y+k),$$

$$\varphi'(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x,y)} h + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x,y)} k,$$

$$\varphi''(\vartheta) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(x+\vartheta h, y+\vartheta k)} h^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_{(x+\vartheta h, y+\vartheta k)} hk + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(x+\vartheta h, y+\vartheta k)} k^2$$

Sostituendo in 8 otteniamo la formula di Taylor per una funzione di due variabili[9]:

$$\begin{aligned}
f(x+h, y+k) = f(x,y) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x,y)} h + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x,y)} k + \\
+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(x+\vartheta h, y+\vartheta k)} h^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_{(x+\vartheta h, y+\vartheta k)} hk + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(x+\vartheta h, y+\vartheta k)} k^2
\end{aligned} \tag{9}$$

Ora, nel caso in cui in $P = (x,y)$ si annulli il gradiente, otteniamo per l'incremento di f:

$$\begin{aligned}
\Delta f &= f(x+h, y+k) - f(x,y) = \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(x+\vartheta h, y+\vartheta k)} h^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_{(x+\vartheta h, y+\vartheta k)} hk + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(x+\vartheta h, y+\vartheta k)} k^2 = \\
&= (h,k) H_{(x+\vartheta h, y+\vartheta k)} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aggiungendo e togliendo

$$(h,k) H_{(x,y)} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

otteniamo:

$$\Delta f = (h,k) H_{(x,y)} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (h,k) A \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

[9] L'estensione a un numero qualsiasi di variabili presenta solo una difficoltà formale di scrittura.

ove:

$$A = H_{(x+\vartheta h, y+\vartheta k)} - H_{(x,y)} \tag{10}$$

è una matrice infinitesima per $(h,k) \to (0,0)$.
Se dividiamo per $h^2 + k^2$ e poniamo $(u,v) = \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}(h,k)$ otteniamo:

$$\frac{\Delta f}{h^2+k^2} = (u,v)H_{(x,y)}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + (u,v)A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Se la forma quadratica $H_{(x,y)}$ è definita positiva, essa ammette un minimo assoluto positivo sul circolo[10] dei versori (u,v) e dunque, detto $m > 0$ tale minimo, abbiamo:

$$\frac{\Delta f}{h^2+k^2} \geq m + (u,v)A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Si osservi che la minorazione ottenuta sussiste per qualsiasi direzione del vettore (h,k). Poiché il termine (10) è una forma quadratica infinitesima per $(h,k) \to (0,0)$, esisterà un raggio δ per cui $+(u,v)A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ è maggiore di $-\frac{m}{2}$ se $\sqrt{h^2+k^2} < \delta$. Se l'incremento ΔP è in modulo minore di δ, abbiamo dunque:

$$\frac{\Delta f}{h^2+k^2} \geq m - \frac{m}{2} > 0.$$

Abbiamo dimostrato che in un intorno di P l'incremento della funzione è positivo e quindi $P = (x,y)$ è di minimo relativo.
Scambiando f con $-f$ si ottiene che se la forma quadratica $H_{(x,y)}$ del differenziale secondo è definita negativa, allora il punto P è di massimo relativo.
Se invece la forma quadratica non è definita, cioè cambia segno, prendendo due incrementi vettoriali Δ_1 e Δ_2 sui quali ha segno opposto, lungo le rette $P + t\Delta_1$ e $P + t\Delta_2$ la variazione della funzione è di segno opposto e quindi il punto P non è né di massimo né di minimo relativo.
Lo stesso ragionamento si può ripetere per tre o più variabili e le difficoltà sono solo di scrittura.

Teorema 11 *Supponiamo che P sia critico per f, nel senso che il gradiente di f si annulla in P. Sia H la matrice hessiana del differenziale secondo, calcolata in P. Allora:*

- *se la forma quadratica associata ad H è definita positiva (negativa) allora P è di minimo (massimo) locale stretto per f;*
- *se la forma quadratica associata ad H assume valori di ambo i segni, allora P non è né di massimo né di minimo per f (punto di sella per f).*

Ricordiamo che un criterio per riconoscere il segno della forma quadratica è trovare il segno degli autovalori.

- Se siamo in due variabili e il determinante è negativo, esistono due autovalori di segno opposto e quindi il punto non è né di massimo né di minimo.
- Se, sempre in due variabili, il determinante è positivo, il segno della forma quadratica coincide con il segno di una qualsiasi derivata seconda pura.

[10] In tre variabili avremo la sfera.

- Se abbiamo più di due variabili, conviene usare il seguente criterio dei minori orlati. *Se, preso un elemento della diagonale, esso e tutti i minori principali ottenuti orlando via via con nuove righe e colonne di uguale indice, sono strettamente positivi, allora la forma quadratica è definita positiva. Se fra questi minori quelli di ordine dispari sono strettamente negativi e quelli di ordine pari sono strettamente positivi, allora la forma quadratica è definita negativa. Tali condizioni sono anche necessarie perché la forma sia definita rispettivamente positiva o negativa.*

Concludendo:

- se ci sono due autovalori di segno opposto, il punto è di sella;

- se gli autovalori sono tutti strettamente positivi (negativi) il punto è di minimo (massimo) locale;

- se non esistono autovalori di segno opposto, ma uno di essi è 0, nulla si può dire a priori.

Gli esempi che seguono sono tratti da [**S1**].

sans changer de signe, c'est-à-dire qu'on a le cas douteux.

En tenant compte de ce que dans le cas d on a $AC - B^2 < 0$ et dans le cas e nous avons $AC - B^2 = 0$, on peut énoncer la règle suivante: *pour obtenir les maxima et les minima à l'intérieur d'un domaine en supposant que la fonction $f(x, y)$ soit continue et possède des dérivées continues du second ordre, il faut écrire les dérivées partielles $f'_x(x, y)$ et $f'_y(x, y)$ et résoudre le système d'équations*:

$$f'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0.$$

Soit $x = a$, $y = b$ une solution quelconque de ce système. En posant:

$$\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial a^2} = A, \quad \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial a\, \partial b} = B, \quad \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial b^2} = C,$$

on détermine la solution d'après le schéma suivant:

$AC - B^2$	+		−	0
A	+	−	ni min. ni max.	cas douteux
	min.	max.		

V-2-4. Exemples. 1. Examinons une surface $z = f(x, y)$. L'équation du plan tangent sera [V-1-10]:

$$p(X-x)+q(Y-y)-(Z-z)=0,$$

où p et q représentent les dérivées partielles $f'_x(x, y)$ et $f'_y(x, y)$.

Si pour certaines valeurs $x = a$ et $y = b$ la fonction z passe par un maximum ou un minimum, le point correspondant est *un sommet* de la surface: en un tel point le plan tangent doit être parallèle au plan XY, c'est-à-dire que les dérivées partielles p et q doivent s'annuler et la surface doit être située d'un côté du plan tangent, au voisinage du point de contact (fig. 163). Mais il

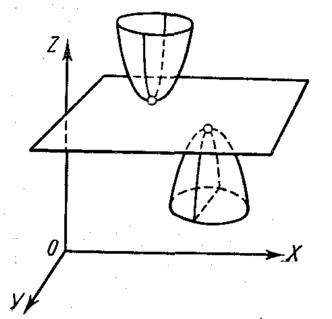

Fig. 163

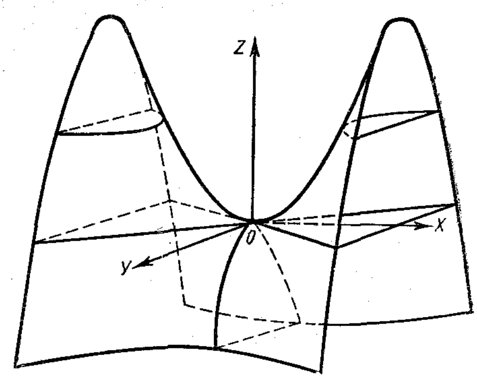

Fig. 164

peut arriver que p et q s'annulent en un certain point, c'est-à-dire que le plan tangent soit parallèle au plan XY mais la surface au voisinage de ce point est située des deux côtés du plan tangent, et dans ce cas pour des valeurs définies de x et de y la fonction z ne passera ni par un maximum ni par un minimum.

Indiquons encore une éventualité qui peut avoir lieu dans le cas que nous avons appelé douteux au paragraphe précédent. Supposons que pour $x = a$, $y=b$ le plan tangent est parallèle au plan XY et la surface est située d'un côté du plan tangent mais a en commun avec lui une ligne passant par le point de contact. Dans ce cas la différence:

$$f(a+h, b+k)-f(a, b),$$

ne changeant pas de signe pour des valeurs absolues de h et k suffisamment petites, pourra s'annuler, bien que h ou k ne soient pas nuls. Il est facile de réaliser ce cas, en s'imaginant par exemple un cylindre dont l'axe est parallèle au plan XY. Dans ce cas on dit aussi que la fonction $f(x, y)$ a un maximum ou un minimum pour $x = a$ et $y = b$ [V-2-2].

La surface

$$2z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$

est un paraboloïde hyperbolique. En annulant les dérivées partielles de z par rapport à x et à y on obtient $x = y = 0$, et le plan tangent à la surface à l'origine des coordonnées coïncidera avec le plan XY. Considérons les dérivées partielles du second ordre:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{b^2},$$

par conséquent, nous avons:

$$AC-B^2=-\frac{1}{a^2b^2}<0,$$

c'est-à-dire que pour $x=y=0$ la fonction z n'a ni maximum ni minimum et au voisinage de l'origine des coordonnées la surface est disposée de part et d'autre du plan tangent (fig. 164).

2. Sur une surface on se donne n points $M_i\ (a_i,\ b_i)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. On cherche le point M tel que la somme des produits des nombres positifs donnés m_i par le carré des distances du point M aux points M_i soit minimum. Soit $(x,\ y)$ les coordonnées du point M cherché. La somme considérée sera:

$$w=\sum_{i=1}^{n} m_i\,[(x-a_i)^2+(y-b_i)^2].$$

En annulant les dérivées partielles w'_x et w'_y, il vient:

$$x=\frac{m_1a_1+m_2a_2+\ldots+m_na_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}, \quad y=\frac{m_1b_1+m_2b_2+\ldots+m_nb_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}. \tag{12}$$

On peut facilement vérifier que dans le cas considéré A et $AC-B^2$ seront positifs et que, par conséquent, un minimum w correspondra effectivement aux valeurs trouvées de x et y. Ce minimum est la valeur la plus petite de w dans le plan $(x,\ y)$ car $w\to+\infty$ lorsqu'on éloigne indéfiniment le point $(x,\ y)$.

Si les points M_i sont des points matériels de masse m_i, *la formule* (12) *définit les coordonnées du centre de gravité pour le système des points* M_i.

V-2-5. Remarques supplémentaires sur la recherche des minima et des maxima d'une fonction. Les raisonnements précédents peuvent se généraliser au cas d'un plus grand nombre de variables indépendantes. Soit une fonction de trois variables indépendantes $f\ (x,\ y,\ z)$. Pour trouver les valeurs des variables indépendantes pour lesquelles cette fonction passe par un maximum ou un minimum, nous devons résoudre un système de trois équations avec trois inconnues [V-2-2]:

$$f'_x\,(x,\ y,\ z)=0,\quad f'_y\,(x,\ y,\ z)=0,\quad f'_z\,(x,\ y,\ z)=0. \tag{13}$$

Soit $x=a,\ y=b,\ z=c$ une des solutions du système. Exposons brièvement le moyen d'étudier ces valeurs. La formule de Taylor nous donne l'accroissement d'une fonction sous forme d'une somme de polynômes homogènes développés suivant les puissances des accroissements des variables indépendantes:

$$\Delta f=h\,\frac{\partial f\,(a,\ b,\ c)}{\partial a}+k\,\frac{\partial f\,(a,\ b,\ c)}{\partial b}+l\,\frac{\partial f\,(a,\ b,\ c)}{\partial c}+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}+l\,\frac{\partial}{\partial c}\right)^{(2)} f\,(a,\ b,\ c)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}+l\,\frac{\partial}{\partial c}\right)^{(n+1)} f\,(a+\theta h,\ b+\theta k,\ c+\theta l)\quad (0<\theta<1). \tag{14}$$

Les valeurs $x = a$, $y = b$, $z = c$ vérifient les équations (13). Par suite:

$$h\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial a}+k\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial b}+l\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial c}=0.$$

Si l'ensemble des termes du second ordre par rapport à h, k, l

$$\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}+l\frac{\partial}{\partial c}\right)^{(2)} f(a, b, c) \tag{15}$$

s'annule seulement pour $h = k = l = 0$, le signe du second membre de (14) pour h, k, l suffisamment petits en valeur absolue est le même que celui de (15), et si ce signe est $(+)$, $f(a, b, c)$ est un minimum de la fonction $f(x, y, z)$, si c'est $(-)$, nous avons un maximum. Si l'expression (15) peut avoir des signes différents, $f(a, b, c)$ n'est ni un maximum, ni un minimum de la fonction. Si enfin l'expression (15), sans changer de signe, s'annule pour certaines valeurs de h, k, l différentes de $h = k = l = 0$, on a le cas douteux et il faut étudier dans le second membre de (14) des termes qui ont un degré supérieur à deux en h, k et l.

Effectuons l'examen complet de ce cas douteux dans l'exemple particulier de deux variables indépendantes:

$$u=x^2-2xy+y^2+x^3+y^3.$$

Les valeurs $x = y = 0$ rendent nulles les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$. De plus, nous avons:

$$A=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=2, \qquad B=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=-2, \qquad C=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=2,$$

$$AC-B^2=0,$$

c'est-à-dire que nous sommes dans le cas douteux. Une particularité caractéristique de ce cas est que l'ensemble des termes du second degré dans l'expression de la fonction u est un carré parfait et nous pouvons écrire

$$u=(x-y)^2+(x^3+y^3).$$

Pour $x = y = 0$, u devient nul. Pour examiner le signe de u pour x et y voisins de zéro, introduisons les coordonnées polaires:

$$x=r\cos\alpha, \quad y=r\sin\alpha.$$

En remplaçant x et y par leurs valeurs, il vient:

$$u=r^2\left[(\cos\alpha-\sin\alpha)^2+r(\cos^3\alpha+\sin^3\alpha)\right].$$

Pour toute valeur de α dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, différente de $\frac{\pi}{4}$ et de $\frac{5\pi}{4}$:

$$\cos\alpha-\sin\alpha\neq 0,$$

et pour toute valeur de α on peut choisir un r_0 positif tel que pour $r < r_0$ l'expression entre crochets soit positive. Si $\alpha=\frac{\pi}{4}$, l'expression restera positive, mais pour $\alpha=\frac{5\pi}{4}$ elle devient négative et, par conséquent, pour $x = y = 0$ la fonction u n'aura ni maximum ni minimum.

Examinons maintenant la fonction:

$$u=(y-x^2)^2-x^5.$$

Il est facile de vérifier que pour $x = y = 0$ les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ s'annulent et que nous sommes dans le cas douteux. En prenant x arbitrairement petit et en posant $y = x^2$ on voit que la fonction u devient $(-x^5)$ et son signe dépendra de celui de x, c'est-à-dire que pour $x = y = 0$ la fonction ne passera ni par un maximum ni par un minimum. Introduisant les coordonnées polaires nous obtenons:

$$u = r^2 (\sin^2 \alpha - 2r \cos^2 \alpha \sin \alpha + r^2 \cos^4 \alpha - r^3 \cos^5 \alpha),$$

et on voit que pour toute valeur de α y compris $\alpha = 0$ et π, on peut trouver un r_0 positif tel que $u > 0$ pour $r < r_0$, c'est-à-dire que sur toute demi-droite issue

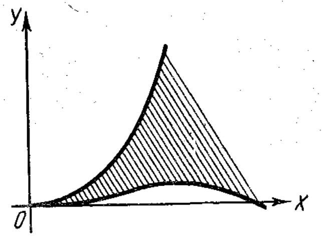

Fig. 165

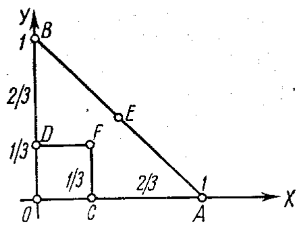

Fig. 166

de l'origine, la fonction u soit positive au voisinage de l'origine. Cependant cela n'entraîne pas que l'origine soit un minimum où $u = 0$ car on ne peut pas trouver un r_0 qui soit *le même* pour toutes les valeurs de α.

Nous avons tracé la courbe $(y - x^2)^2 - x^5 = 0$ [II-5-7], et nous avons vu qu'elle a un point de rebroussement du deuxième ordre à l'origine et que le premier membre de cette équation est négatif au voisinage de l'origine pour les points situés dans la région hachurée de la fig. 165 qui se trouve entre les deux branches de la courbe.

V-2-6. La plus grande et la plus petite valeur d'une fonction. Supposons que l'on veuille chercher la valeur la plus grande d'une fonction $f(x, y)$ donnée dans un certain domaine. La méthode exposée [V-2-3] nous permet de trouver tous les maxima *à l'intérieur* de ce domaine, c'est-à-dire les points du domaine où la fonction n'est pas moins grande qu'aux points voisins. Pour trouver la plus grande valeur de la fonction il faut tenir compte des valeurs de la fonction *aux limites* (contours) du domaine considéré et comparer ses maxima situés à l'intérieur du domaine avec ses valeurs sur les contours. La plus grande de toutes ces valeurs sera celle *la plus grande de la fonction dans le domaine donné.* On obtient de façon analogue *la plus petite valeur* de la fonction dans le domaine. Pour expliciter ces notions nous allons traiter un exemple.

Dans le plan on se donne le triangle OAB (fig. 166) *formé par les axes OX, OY et la droite*

$$x + y - 1 = 0. \tag{16}$$

On veut trouver le point de ce triangle pour lequel la somme des carrés des distances du point aux sommets du triangle soit la plus petite.

En tenant compte de ce que les sommets A et B ont pour coordonnées (1, 0) et (0, 1), nous pouvons écrire cette somme des carrés des distances du point variable (x, y) aux sommets du triangle:

$$z = 2x^2 + 2y^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2.$$

V-2. FORMULE DE TAYLOR, MAXIMA ET MINIMA D'UNE FONCTION 413

En annulant les dérivées partielles du premier ordre, nous obtenons $x = y = {}^1/_3$ et il est facile de montrer que la valeur correspondante de la fonction $z = {}^4/_3$ est le minimum. Examinons maintenant les valeurs de z sur le contour du triangle. Pour examiner la valeur de z sur le côté OA il suffit de poser $y = 0$ dans l'expression de z:

$$z = 2x^2 + (x-1)^2 + 1,$$

et x varie dans l'intervalle (0, 1). En faisant comme en [II-3-4], on voit que la plus petite valeur de z sur OA est ${}^5/_3$ au point C pour lequel $x = {}^1/_3$. De même, sur OB z passera par la plus petite valeur ${}^5/_3$ au point D pour lequel $y = {}^1/_3$. Pour examiner les valeurs de z sur le côté AB il suffit de poser $y = 1 - x$ dans l'expression (16) de z:

$$z = 3x^2 + 3(x-1)^2,$$

et x varie dans l'intervalle (0, 1). Dans ce cas la valeur minimum de z sera ${}^3/_2$ et se trouve au point E pour lequel $x = y = {}^1/_2$. Nous obtenons ainsi la table des valeurs les plus petites possibles de la fonction:

x, y	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}, 0$	$0, \frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
z	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$

On voit sur cette table que la plus petite valeur $z = {}^4/_3$ sera atteinte au point $({}^1/_3; {}^1/_3)$. Le problème posé peut être également résolu pour tout triangle et le point cherché est le centre de gravité du triangle.

BIBLIOGRAFIA

[SIE] C. L. Siegel, *Elliptic Functions and Uniformization Theory*, John Wiley&Sons, New York (1969).

[S] G F. Simmons, *Calculus with Analytic Geometry*, McGraw-Hill, New York (1996).

[S1] V. Smirnov, *Cours de mathématiques supérieures*, Tome I, MIR, Moscow (1969).

[S2] V. Smirnov, *Cours de mathématiques supérieures*, Tome II, MIR, Moscow (1969).