Analisi Matematica 1 Mod. A per Matematica 9/1/2009

$\boxed{\mathbf{1}}$

a) Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e p un punto di E.
Dire cosa significa che f è continua in p, usando il linguaggio degli intorni.
Riformulare la definizione, usando la distanza usuale e i numeri reali positivi.
Se $p \in E'$, scrivere la definizione di continuità tramite la nozione di limite.

b) Al variare del parametro reale α, determinare i punti in cui è continua la seguente funzione, motivando la risposta:

$$E = [0,1] \cup \mathbb{N}, \qquad f_\alpha(x) = \begin{cases} \log(1+x^\alpha) & \text{se } x \in]0,1[\setminus\{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{x+8} & \text{se } x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Dire inoltre per quali valori di α l'immagine $f(E)$ è un intervallo.

$\boxed{\mathbf{2}}$

a) Discutere, al variare del parametro reale α, l'esistenza e il valore dei seguenti limiti, motivando le risposte:

$$\lim_{x \to +\infty} 4x^\alpha - x^3 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x^\alpha}{3x^2 - e^{-\alpha x}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x \sin(x^\alpha) \qquad \lim_{x \to 0} (2^x + 4^x - 1)^{\frac{1}{x}}$$

b) Determinare i limiti delle sottosuccessioni convergenti della seguente successione complessa e disegnarli sul piano complesso (i risultati devono essere scritti in forma algebrica):

$$z_n = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \frac{n+i}{1+in}$$