SPAZI METRICI E TOPOLOGICI

Nel piano $\mathbb{R}^2$ o nello spazio $\mathbb{R}^3$ la distanza fra due punti è la lunghezza, o *norma euclidea*, del vettore differenza di questi due punti.
Se $p = (x, y, z)$ è un vettore in coordinate ortonormali, la sua lunghezza è:

$$|p| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Se $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$, la loro distanza è:

$$d(p_1, p_2) = |p_2 - p_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Questa distanza si chiama *metrica euclidea* o *pitagorica*, per distinguerla da altre metriche.

Definizione 1 *Uno spazio metrico è un insieme X fornito di una funzione distanza (=metrica)*

$$d : X \times X \to [0, +\infty[$$

che verifica le seguenti tre condizioni (per ogni coppia di punti):

D$_1$) $d(x, y) \geq 0$ *e inoltre* $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

D$_2$) $d(x, y) = d(y, x)$

D$_3$) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Uno spazio metrico X con metrica d si indica con il simbolo (X, d).

Esercizio. Verificare che:

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$$

Esempi. $\boxed{\mathbb{R}^n \text{ con la distanza euclidea:}}$

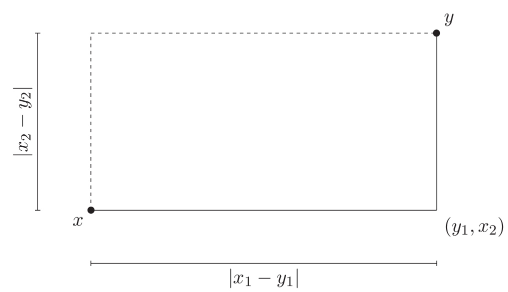
$$\begin{aligned} d_2(x, y) &= |y - x| = \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2}, \end{aligned}$$

ove $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

È difficile verificare la disuguaglianza triangolare.

$\boxed{\mathbb{R}^2 \text{ con la metrica del reticolato (o di Manhattan):}}$

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \qquad \text{ove } x = (x_1, x_2) \text{ e } y = (y_1, y_2).$$



$\boxed{\mathbb{R}^2 \text{ con la metrica del sup:}}$

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|,\ |x_2 - y_2|\}, \qquad \text{ove...}$$

$\boxed{\text{Distanza geodetica in } \mathbb{S}^2, \text{ sfera dei versori di } \mathbb{R}^3.}$

$$\mathbb{S}^2 = \{u \in \mathbb{R}^3 :\ |u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = 1\}$$

$$d(u, v) = \arccos(u \cdot v)$$

Si tratta della lunghezza del minore fra i due archi di cerchio massimo di estremi u e v.

$\boxed{\text{Metrica discreta su un insieme } E.}$

Si fissa una costante $\alpha > 0$ e si definisce per $x \neq y$:

$$d(x, y) = \text{un qualsiasi numero } \geq \alpha \text{ in modo che valga } (D_3)$$

Ad esempio: $d(x, y) = \alpha \quad \forall\, x \neq y$.

Siano E un insieme e $g : E \to \mathbb{R}$ una funzione iniettiva.
La posizione

$$d_g(x, y) = |g(x) - g(y)|$$

definisce una metrica su E.

Definizione 2 *Se $S \subseteq X$ e d è una metrica su X, allora $d_S = d_{|S\times S}$ è una metrica su S, detta metrica indotta, e (S, d_S) si dice sottospazio metrico di (X, d).*

Scriveremo sempre (S, d).

Esempio. La metrica indotta su $\mathbb{Z}^2$ dalla metrica euclidea di $\mathbb{R}^2$ è discreta, $\alpha = 1$.

Definizione 3 *Dati uno spazio metrico (X, d), un punto $a \in X$ e un numero reale $r > 0$, si definiscono:*

- *palla aperta di centro a e raggio r:*

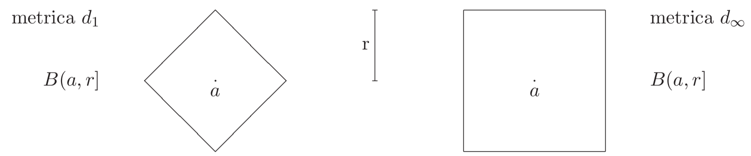
$$B(a, r[= \{x \in X : \ d(a, x) < r\}$$

- *palla chiusa di centro a e raggio r:*

$$B(a, r] = \{x \in X : \ d(a, x) \leq r\}$$

Se necessario si usa B_d in luogo di B.

Esercizio. Disegnare le palle in $\mathbb{R}^2$ con le metriche d_2, d_1 e d_∞.



Domande. Chi sono le palle (aperte e chiuse) nella metrica discreta? Chi sono le palle nella metrica geodetica della sfera? Quali sono le palle (aperte e chiuse) di raggio π?

Definizione 4 *Siano* (X, d) *e* (Y, ρ) *spazi metrici.*
Una funzione $f : X \to Y$ *si dice* ***lipschitziana*** *se esiste una costante* $l \geq 0$ *tale che:*

$$\rho(f(x), f(y)) \leq l \cdot d(x, y), \quad \forall\ x, y \in X$$

l *è detta costante di Lipschitz.*

Esercizio. L'estremo inferiore delle costanti di Lipschitz per una funzione lipschitziana è ancora una costante di Lipschitz.
Essa si chiama **la** costante di Lipschitz.

Su $\mathbb{R}$ si considera sempre la metrica $|t - s|$.

Esercizi.

- Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile.
  Dimostrare che f è lipschitziana $\iff$ f' è limitata.
- Sia $X = \mathbb{R}^n$ con la distanza definita da $|x - y| = ((x - y) \cdot (x - y))^{\frac{1}{2}}$.
  Allora $x \to |x|$ è una funzione lipschitziana da X in $[0, +\infty[$
  (segue da $||x| - |y|| \leq |x - y|$).

Definizione 5 *Siano* (X, d) *uno spazio metrico e* A *un sottoinsieme non vuoto di* X*.*
Si consideri la funzione $d(\cdot, A) : X \to [0, +\infty[$*, detta* ***distanza da*** A*, definita ponendo per ogni* $x \in X$*:*

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) :\ y \in A\}$$

Proposizione 6 *Si ha:*

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

Dimostrazione. Basta dimostrare che $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$.
Poiché $d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) \quad \forall\ a \in A$, passando all'$\inf_{a \in A}$ a destra, si ottiene quanto voluto. □

Definizione 7 *Il diametro di un sottoinsieme* $A \neq \emptyset$ *di uno spazio metrico* (X, d) *è:*

$$\operatorname{diam} A = \sup\{d(x, y) :\ x, y \in A\}, \quad \textit{dove il sup può essere anche } +\infty$$

Si pone $\operatorname{diam} \emptyset = 0$.
Un sottoinsieme si dice limitato se ha diametro finito (cioè $\in \mathbb{R}$*).*

Esercizi.

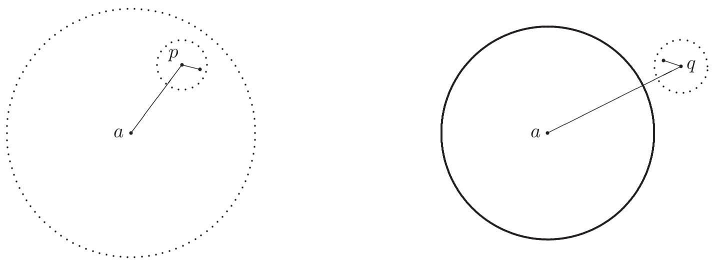
- Il diametro di una palla di raggio $r > 0$ è $\leq 2r$.
  Dare un esempio in cui il diametro è strettamente $< 2r$.
  Dimostrare che in $\mathbb{R}^n$ munito di una qualunque delle metriche d_1, d_2, d_∞, tale diametro è esattamente $2r$.
- Un sottoinsieme è limitato $\iff$ è contenuto in una palla.
- Un'unione finita di sottoinsiemi limitati è un sottoinsieme limitato.
- Sia $A = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$.
  Trovare il diametro di A in d_2, d_1, d_∞.
  Sia $E = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ |x| = \|x\|_2 = r\}$.
  Chi è il diametro di E in d_∞? E in d_1?

Topologia di uno spazio metrico

La topologia serve per dare nozioni di *vicinanza* e di *convergenza*.

Definizione 8 *Siano* (X, d) *uno spazio metrico e* $A \subseteq X$*.*
A si dice aperto se è vuoto oppure se è unione di palle aperte.
La topologia dello spazio metrico (X, d) *è la famiglia* τ_d*, o più semplicemente* τ*, costituita da tutti i sottoinsiemi aperti.*
La coppia (X, τ) *è detta* ***spazio topologico metrizzabile****.*
Un insieme si dice ***chiuso*** *se il suo complementare è un insieme aperto.*

Esercizio. Se $p \in B(a, r[$ e $s \leq r - d(p, a)$, allora $B(p, s[\subseteq B(a, r[$.
Se $q \notin B(a, r]$ e $t \leq d(q, a) - r$, allora $B(q, t[\cap B(a, r] = \emptyset$.
Prima conseguenza: ogni palla chiusa è un insieme chiuso.



Seconda conseguenza dell'esercizio precedente.

Proposizione 9 *A è aperto $\iff$ per ogni $p \in A$ esiste un numero reale $\delta > 0$ tale che $B(p, \delta[\subseteq A$.*

Dimostrazione. Sufficienza: immediata.
Necessità. Sia $p \in A$ con A insieme aperto.
Esiste una palla aperta $B(a, r[$ tale che $p \in B(a, r[\subseteq A$.
Sia $s \leq r - d(p, a)$. Per l'esercizio precedente si ottiene:

$$B(p, s[\subseteq B(a, r[\subseteq A$$

□

Proposizione 10 *La topologia τ di uno spazio metrico soddisfa le seguenti proprietà:*

A$_1$) *$\emptyset, X \in \tau$;*

A$_2$) *se $A_\lambda \in \tau$ per ogni $\lambda \in \Lambda$, allora:*

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau$$

ogni unione arbitraria di aperti è un aperto.

A$_3$) *se $A_1, \ldots, A_m \in \tau$, allora:*

$$A_1 \cap \cdots \cap A_m \in \tau$$

ogni intersezione finita di aperti è un aperto.

Dimostrazione. (A_1) ovvia.
(A_2) unione di unioni di palle aperte...
(A_3). Basta dimostrarlo per due insiemi aperti A_1 e A_2; useremo la prop. 9.
Sia $p \in A_1 \cap A_2$. Esistono allora $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ tali che:

$$B(p, r_1[\subseteq A_1, \qquad B(p, r_2[\subseteq A_2$$

Supponiamo $r_1 \leq r_2$. Allora ovviamente $B(p, r_1[\subseteq A_1 \cap A_2$. □

Esercizio. Mostrare con un esempio che un'intersezione arbitraria di insiemi aperti non è in generale un insieme aperto.

Definizione 11 *Un sottoinsieme C di X si dice chiuso se il suo complementare*

$$X \setminus C = \{x \in X : \ x \notin C\}$$

è un aperto.

Esercizio. I *singoletti* (insiemi del tipo $\{x\}$) sono insiemi chiusi.

Dalla dualità di De Morgan si ottengono le seguenti proprietà dei chiusi:

C$_1$) $X, \emptyset$ sono chiusi;

C$_2$) se C_λ è chiuso per ogni $\lambda \in \Lambda$, allora $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ è chiuso;

C$_3$) se $C_1, \ldots, C_m$ sono chiusi, allora $C_1 \cup \cdots \cup C_m$ è chiuso.

Esercizio. Mostrare con un esempio che un'unione arbitraria di insiemi chiusi non è in generale un insieme chiuso.

Definizione 12 *Un sottoinsieme U di X si dice **intorno** di un punto $p \in X$ se esiste un aperto A tale che:*

$$p \in A \subseteq U$$

cioè U deve contenere un insieme aperto che contiene p.

Meditazione:

un insieme è aperto se e solo se è intorno di ogni suo punto

La famiglia $\mathcal{I}_p$ di tutti gli intorni di p si chiama *filtro degli intorni di p*.

Proprietà di $\mathcal{I}_p$:

(I_1) $\forall\, U \in \mathcal{I}_p$ si ha $p \in U$;

(I_2) se $U \in \mathcal{I}_p$ e $U \subseteq V \subseteq X$, allora $V \in \mathcal{I}_p$;

(I_3) se $U, V \in \mathcal{I}_p$, allora $U \cap V \in \mathcal{I}_p$;

(I_4) se $U \in \mathcal{I}_p$ allora esiste $A \subseteq U$ con $p \in A$ e tale che $A \in \mathcal{I}_x$ per ogni $x \in A$.

Definizione 13 *Una famiglia $\mathcal{B}_p$ di sottoinsiemi di X si dice* ***base per il filtro degli intorni di*** *p se:*

i) per ogni $U \in \mathcal{B}_p$ si ha $U \in \mathcal{I}_p$;

ii) per ogni $V \in \mathcal{I}_p$ si ha che esiste $U \in \mathcal{B}_p$ tale che $U \subseteq V$.

Esercizio. Verificare che in uno spazio metrico ciascuna delle seguenti famiglie è base per gli intorni di p:

a) $\{B(p, \delta[:\ \delta > 0\}$

b) $\{B(p, \delta] :\ \delta > 0\}$

c) $\{B(p, \frac{1}{n}[:\ n = 1, 2, \dots\}$

Quando si parla di $\mathbb{R}^n$ si intende con la topologia *usuale* o euclidea, cioè quella indotta dalla metrica euclidea $|x - y|$.

Esercizio.

- In $\mathbb{R}$ la famiglia degli intervalli aperti che contengono un punto p costituisce una base per il filtro degli intorni di p.
- Sia U aperto non vuoto di $\mathbb{R}$.
  Dimostrare che U contiene sia numeri razionali sia numeri irrazionali.
  Generalizzare il risultato a $\mathbb{R}^n$.

Osservazione importante In $\mathbb{R}^2$ si considerino le metriche d_1, d_2, d_∞. Non è difficile dimostrare che:

$$d_\infty \le d_2 \le \sqrt{2} d_\infty \quad \text{e inoltre} \quad d_\infty \le d_1 \le 2 d_\infty$$

Usando queste disuguaglianze, si dimostra che ogni palla aperta in una di queste metriche contiene una palla aperta con lo stesso centro in una qualsiasi delle altre due. Pertanto le tre metriche definiscono gli stessi intorni e quindi la stessa topologia. Questa topologia è costituita anche dalle unioni arbitrarie di rettangoli aperti $I \times J$ con I e J intervalli aperti di $\mathbb{R}$ [v. GDM prop. 8.3.2]. Tale topologia si chiama *topologia prodotto*.

Sia $A \subseteq X$. Si dice **chiusura di** A **in** X, e si indica con $\overline{A}$ o con $\mathrm{cl}_X(A)$, il seguente insieme:

$$\overline{A} = \bigcap \{C :\ C \supseteq A,\ C \text{ chiuso in } X\}$$

È il più piccolo chiuso che contiene A.
Proprietà:

(Cl_1) $\forall\, A \subseteq X$ si ha $A \subseteq \overline{A}$;

(Cl_2) se $A, B \subseteq X$ allora $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(Cl_3) per ogni $A \subseteq X$ si ha $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

Esercizio. Dopo aver osservato che in $\mathbb{R}$ ogni intervallo aperto non vuoto contiene numeri razionali,
dedurre che $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
È vero che $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$?

Esercizio. Dimostrare che $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$,
e che l'inclusione può essere stretta.

Proposizione 14 *Siano $p \in X$ e $A \subseteq X$. Allora:*

$p \in \overline{A}$ se e solo se per ogni intorno U di p si ha $U \cap A \ne \emptyset$.

Importante Siano d la metrica che induce la topologia di X e $A \subseteq X$, $A \ne \emptyset$. Allora:

$$\overline{A} = \{x \in X :\ d(x, A) = 0\}$$

Si dice **interno di** A, indicato con $\mathring{A}$ oppure $\mathrm{int}_X(A)$:

$$\mathring{A} = \bigcup \{U : \ U \subseteq A, \ U \text{ aperto in } X\}$$

È il massimo sottoinsieme aperto contenuto in A.
Se $p \in \mathring{A}$, allora p si dice interno ad A.
Fatto: $X \setminus \overline{A} = \mathrm{int}(X \setminus A)$.
Un punto p si dice **di frontiera** per A se p non è interno né ad A né a $X \setminus A$, cioè se ogni intorno di p contiene punti di A e punti di $X \setminus A$.
Si chiama **frontiera di** A e si indica con $\mathrm{fr}_X(A)$ o ∂A l'insieme dei punti di frontiera per A.

Fatti:

- $\mathrm{fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \mathrm{fr}(X \setminus A)$.
- $\overline{A} = A \cup \mathrm{fr}\, A$.
- $p \in \mathrm{fr}\, A \iff \forall\, U \in \mathcal{I}_p$ si ha $U \cap A \neq \emptyset$ e $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.
- $\mathrm{fr}\, A$ è un insieme chiuso.
- Un insieme è chiuso se e solo se contiene la propria frontiera.

Definizione 15 *Un punto $p \in X$ si dice* ***punto di accumulazione*** *per un sottoinsieme A di X se ogni intorno U di p contiene punti di A diversi da p.*
Un punto $p \in A$ si dice ***isolato*** *in A se non è di accumulazione per A.*

Fatti:

- L'insieme dei punti di accumulazione per A si chiama **derivato** di A e si indica con A'. Si ha:
$$\overline{A} = A \cup A'$$
- Il punto p è di accumulazione per A se e solo se ogni intorno di p contiene infiniti punti di A.

Esercizio. Trovare la chiusura, l'interno, la frontiera, il derivato e l'insieme dei punti isolati dei seguenti insiemi:

$$\begin{array}{ll}
A \subseteq \mathbb{R} & A = \mathbb{Q} \cap]0,1[\cup \{2\} \\
A \subseteq \mathbb{R} & A =]-\infty, 0[\cup \{1\} \\
A \subseteq \mathbb{R}^2 & A = \mathbb{Q}^2 \cap ([0,1] \times [0,1]) \\
A \subseteq \mathbb{R} & A = \{m + \frac{1}{n} : \ m \in \mathbb{Z}, \ n \geq 1, \ n \in \mathbb{N}\} \\
A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} & A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \text{ con la topologia della metrica del riccio}
\end{array}$$

Definizione 16 *Un sottoinsieme $D \subseteq X$ si dice **denso** in X se una delle seguenti condizioni equivalenti è soddisfatta:*

1) $\overline{D} = X$.

2) *Ogni aperto non vuoto contiene punti di D.*

Ad esempio, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono entrambi densi in $\mathbb{R}$.

Esercizio. L'intersezione di due aperti densi è aperto e denso.

Definizione 17 *Sia $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una successione di punti di X e sia $p \in X$. Si dice che $\lim x_j = p$ se per ogni intorno U di p esiste $\bar{j} \in \mathbb{N}$ tale che $x_j \in U$ per ogni $j \geq \bar{j}$*

cioè se la successione $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sta definitivamente in ogni intorno di p.

Esercizio importante. Sia $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una successione di punti dello spazio metrico X convergente a un punto $p \in X$.
Dimostrare che $E = \{x_j : \ j \in \mathbb{N}\} \cup \{p\}$ è un insieme limitato.

Teorema 18 *Sia (X, τ) spazio metrizzabile e siano $p \in X$ e $A \subseteq X$.
Allora:*

- $p \in \overline{A} \iff$ *esiste una successione $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ con $x_j \in A \ \forall \ j$ tale che* $\lim x_j = p$.
- $p \in A' \iff$ *esiste una successione $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ con $x_j \in A \setminus \{p\} \ \forall \ j$ tale che* $\lim x_j = p$.
  In questo caso la successione si può prendere iniettiva.

SPAZI TOPOLOGICI

La nozione di spazio topologico è più generale di quella di spazio metrizzabile.

Definizione 19 *Uno **spazio topologico** (X, τ) è una coppia costituita da un insieme X e da una famiglia $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ di sottoinsiemi di X soddisfacente agli assiomi* (A$_1$), (A$_2$), (A$_3$).
τ è detta topologia di X;
i suoi elementi sono gli aperti di X.

Esempi.

- Se (X, d) è uno spazio metrico, la famiglia τ costituita dai sottoinsiemi che sono unione di palle aperte forma la topologia indotta dalla metrica d.
- Su ogni insieme X, la famiglia $\tau = \mathcal{P}(X)$ forma una topologia detta **topologia discreta**.
  Essa è indotta dalla metrica discreta;
  in essa i singoletti sono insiemi aperti.
- La famiglia $\tau = \{\emptyset, X\}$ forma una topologia detta **topologia banale**.
- Su $\mathbb{R}$ la famiglia $\tau_\iota = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[: \ a \in \mathbb{R}\}$ forma una topologia detta **topologia inferiore** di $\mathbb{R}$.
  (analogamente si definisce la topologia superiore).

I concetti di chiuso, intorno, chiusura, interno,... si danno come negli spazi metrizzabili, e sussistono le stesse proprietà.
Attenzione:

non è più detto che i singoletti e gli insiemi finiti siano chiusi;
non è più detto che se p è un punto di accumulazione per un sottoinsieme A, allora ogni intorno di p contenga infiniti punti di A.

Esempio. Trovare la chiusura di un insieme finito nella topologia inferiore.

Proposizione 20 *In uno spazio metrizzabile (X, d) punti distinti hanno intorni disgiunti.*

Dimostrazione. Se $p \neq q$, sia $r < \frac{1}{2}d(p, q)$:
le palle $B(p, r[$ e $B(q, r[$ sono intorni disgiunti di p e q. □

Negli spazi topologici si può aggiungere l'assioma di separazione di Hausdorff:

Definizione 21 *Uno spazio topologico (X, τ) si dice di Hausdorff, o T_2 o separato, se, comunque presi due punti distinti $x_1 \neq x_2$, esistono U_1 intorno di x_1 e U_2 intorno di x_2 tali che $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

Esercizio.

- In uno spazio topologico di Hausdorff gli insiemi finiti sono chiusi.
- In uno spazio topologico di Hausdorff $p \in A' \iff$ ogni intorno di p contiene infiniti punti di A.
- Uno spazio topologico è di Hausdorff $\iff$ ogni singoletto $\{p\}$ è intersezione di intorni chiusi di p.
- Su un insieme X considerare la topologia cofinita τ_{cof}, i cui aperti sono gli insiemi che hanno complementare finito:
  se X è infinito, τ_{cof} non è mai di Hausdorff;
  se X è finito, τ_{cof} coincide con la topologia discreta.

Un insieme si dice **numerabile** se si può mettere in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme di $\mathbb{N}$.
$\mathbb{Q}$ è numerabile; $\mathbb{R}$ non è numerabile.
X è infinito numerabile $\iff$ $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$,
dove $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione iniettiva (e suriettiva) di punti di X.

Osservazioni.

- Sia $A \subseteq B$ con B infinito;
  poiché $\operatorname{card} B = \max\{\operatorname{card} A, \operatorname{card}(B \setminus A)\}$, se $\operatorname{card} A < \operatorname{card} B$ allora $\operatorname{card}(B \setminus A) = \operatorname{card} B$.
- Sia $\{B_j : j \in \mathbb{N}\}$ una famiglia numerabile di insiemi numerabili.
  Poiché ogni $B_j \setminus \bigcup_{k<j} B_k$ è equipotente a un sottoinsieme N_j di $\mathbb{N}$, allora $\bigcup_j B_j$ si immerge in $\bigcup_j (N_j \times \{j\}) \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Quindi l'unione numerabile di numerabili è numerabile.

Esempio di spazio non metrizzabile.
Siano S un insieme non numerabile e p un punto fissato di S.
τ è così costituita:

tutti i sottoinsiemi di $S \setminus \{p\}$ sono aperti;
se $p \in A \subseteq S$, allora A è aperto $\iff$ $S \setminus A$ è numerabile.

È facile verificare che τ è una topologia T_2.
Se $\{A_j : j \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia numerabile di intorni di p, allora

$$S \setminus \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (S \setminus A_j)$$

è numerabile (unione numerabile di numerabili);
quindi $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j$ è infinito più che numerabile.
Pertanto la topologia non può essere indotta da una metrica perché p non può avere una base numerabile di intorni (come sarebbe la famiglia delle palle di raggio $\frac{1}{n}$).

Definizione 22 *Si chiama **base** per una topologia τ un insieme $\mathcal{B} \subseteq \tau$ tale che ogni elemento di τ è unione di elementi di $\mathcal{B}$, cioè:*

per ogni aperto $A \in \tau$ e per ogni $x \in A$
esiste $U \in \mathcal{B}$ tale che $x \in U \subseteq A$.

Esempi.

- Se (X, τ) è metrizzabile dalla metrica d, allora le palle aperte (di raggio $\frac{1}{n}$) formano una base.
- I singoletti formano una base per la topologia discreta.
- Gli intervalli aperti (di estremi razionali) formano una base per la topologia di $\mathbb{R}$.

Importante:

se $\mathcal{B}$ è una base per una topologia τ su X, allora per ogni $x \in X$ l'insieme

$$\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : \ x \in B\}$$

è base per gli intorni di x nella topologia τ.

Proposizione 23 *La famiglia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è una base per una topologia se e solo se entrambe le seguenti condizioni sono soddisfatte:*

1) per ogni $x \in X$ esiste $U \in \mathcal{B}$ tale che $x \in U$;

2) per ogni $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ e per ogni $x \in U_1 \cap U_2$ esiste $U \in \mathcal{B}$ tale che $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$.

Definizione 24 *Uno spazio si dice **separabile** se contiene un sottoinsieme denso numerabile.*

Esercizio.

- Dimostrare che $\mathbb{R}$ ha una base numerabile per gli aperti.
- Dimostrare che uno spazio topologico con base numerabile è separabile.
- Dimostrare che uno spazio metrizzabile separabile ammette una base numerabile per gli aperti.
  Traccia:
  sia $D = \{x_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ un insieme denso numerabile;
  considerare la famiglia $\mathcal{B} = \{B(x_n, \frac{1}{k}[: \ n, k \in \mathbb{N}, \ k \geq 1\}$.

Definizione 25 *Se (X, τ) è spazio topologico e $S \subseteq X$, la topologia indotta da τ su S è la topologia:*

$$\tau_S = \{A \cap S : \ A \in \tau\}$$

*S con la topologia τ_S è detto **sottospazio topologico** di X.*

Osservare che gli aperti o i chiusi in S non sono in generale aperti o chiusi in X.

Esercizi importanti.

- Dimostrare che se S è aperto (chiuso) in X allora ogni aperto (chiuso) di S è aperto (chiuso) in X.
- Sia (X, d) spazio metrico con topologia $\tau = \tau_d$ e $S \subseteq X$.
  Allora la topologia della metrica indotta d_S coincide con la topologia indotta τ_S
  (la traccia di ogni palla è unione di palle con centri in S).
- Siano $D \subseteq S \subseteq X$ e τ la topologia di X.
  Se D è denso in τ_S e S è denso in X, allora D è denso in X.
  Morale: un denso in un denso è denso.
- Sia $T \subseteq S \subseteq X$, con X spazio topologico.
  Osservare che:
  $$\tau_T = (\tau_S)_T$$
- Qual è la topologia indotta da $\mathbb{R}$ su $\mathbb{Z}$?

Funzioni continue

Definizione 26 *Siano (X,τ) e (Y,σ) spazi topologici, $f : X \to Y$ una funzione, $a \in X$.*

- *f si dice **continua in a** se per ogni intorno V di $f(a)$*

$$\text{esiste un intorno } U \text{ di } a \text{ tale che } f(U) \subseteq V$$
$$\Updownarrow$$
$$f^{\leftarrow}(V) \text{ è un intorno di } a$$

- *f si dice **continua** se è continua in ogni punto $a \in X$.*

Osservazione importante:
Siano $\mathcal{B}_a$ e $\mathcal{B}_{f(a)}$ basi di intorni per a e $f(a)$ rispettivamente.
Allora V si può scegliere in $\mathcal{B}_{f(a)}$ e U esiste in $\mathcal{B}_a$.

Proposizione 27 *Siano (X,d) e (Y,ρ) spazi metrici.*

1) Una funzione $f : X \to Y$ è continua in $a \in X$ se e solo se

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tale che } \forall\, x \in X\ d(x,a) < \delta \ \Rightarrow\ \rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

(le disuguaglianze si possono prendere larghe).

2) Una funzione $f : X \to Y$ è continua in $a \in X$ se e solo se per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di punti di X convergente ad a si ha che la successione $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(a)$.

$\boxed{\textit{Dimostrazione di 2}}$ *Necessità:* conseguenza immediata di 1.
Sufficienza. Per assurdo, se f non fosse continua in a, si potrebbe trovare $\bar{\varepsilon}$ con la seguente proprietà:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad f(B(a, \frac{1}{n}[) \not\subseteq B(f(a), \bar{\varepsilon}[)$$

In altri termini, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esisterebbe $x_n \in X$ che dista meno di $\frac{1}{n}$ da a mentre $f(x_n)$ dista almeno $\bar{\varepsilon}$ da $f(a)$.
Dunque: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad a, mentre $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ non converge a $f(a)$, assurdo. □

Proposizione 28 *Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$.*
Se f è continua in a e g è continua in $f(a)$, allora $g \circ f$ è continua in a

Dimostrazione. $(g \circ f)^{\leftarrow}(W) = f^{\leftarrow}(g^{\leftarrow}(W))$. □

Perciò la composizione di funzioni continue è continua.
Fatti:

- ogni funzione costante è continua.
- la restrizione a un sottospazio di una funzione continua è continua.
- Se A è sottospazio aperto di X e $f_{|A}$ è continua in $a \in A$, allora f è continua in a (è essenziale l'ipotesi che A è aperto).
  Di conseguenza, se $f_{|A}$ è continua, allora f è continua nei punti di A.

Teorema 29 *Sia $f : X \to Y$ una funzione fra spazi topologici.*
Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

i) f è continua.

ii) Per ogni aperto (di base) V di Y si ha che $f^{\leftarrow}(V)$ è un aperto di X.

iii) Per ogni chiuso F di Y si ha $f^{\leftarrow}(F)$ è un chiuso di X.

iv) Per ogni $A \subseteq X$ si ha che $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Dimostrazione. L'equivalenza delle prime tre è elementare.
iii $\Rightarrow$ *iv* Poiché $A \subseteq f^{\leftarrow}(f(A)) \subseteq f^{\leftarrow}(\overline{f(A)})$ e quest'ultimo insieme è chiuso, si ottiene $\overline{A} \subseteq f^{\leftarrow}(\overline{f(A)})$. Passando all'immagine, si ha la tesi.
iv $\Rightarrow$ *iii* Sia F chiuso di Y e sia $A = f^{\leftarrow}(F)$.
Si ha: $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{F} = F$, e quindi:

$$f(\overline{f^{\leftarrow}(F)}) \subseteq F$$

da cui $\overline{f^{\leftarrow}(F)} \subseteq f^{\leftarrow}(F)$.
Dunque $f^{\leftarrow}(F)$ è chiuso perché contiene la propria chiusura. □

Corollario. [v. GDM 12.7.6] Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ funzioni continue a valori reali definite su uno spazio topologico X. Gli insiemi

$$\{x \in X :\ f(x) \leq g(x)\}, \qquad \{x \in X :\ f(x) = g(x)\}$$

sono chiusi in X, mentre l'insieme

$$\{x \in X : \ f(x) < g(x)\},$$

è aperto in X.
In particolare il luogo degli zeri di una funzione continua

$$Z(f) = \{x \in X : \ f(x) = 0\}$$

è chiuso in X.

Incollamento a pezzi.
Sia $f : X \to Y$ una funzione.

- Se X è unione di una famiglia di aperti $\{A_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$
  e $f_{|A_\lambda}$ è continua per ogni λ,
  allora f è continua.
- Se X è unione di una famiglia finita di chiusi $\{F_1, \dots, F_m\}$
  e $f_{|F_j}$ è continua per ogni j,
  allora f è continua.

Morale: purché le restrizioni siano continue,
la continuità si conserva per unioni **finite** di chiusi e unioni **qualsiasi** di aperti.

Esempio. Una funzione $f : X \to Y$ si dice localmente costante se per ogni $a \in X$ esiste un intorno U di a tale che $f(x) = f(a) \ \forall x \in U$.
Ogni funzione localmente costante è continua.

Esercizio. Sia $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{S}^1$ definita da:

$$f(t) = (\cos t, \sin t)$$

Dimostrare che f è biiettiva e continua
ma che l'inversa non è continua in $a = (1, 0)$
(trovare in $\mathbb{S}^1$ un'opportuna successione $(y_n) \to a$ tale che $(f^{-1}(y_n))$ non converge).

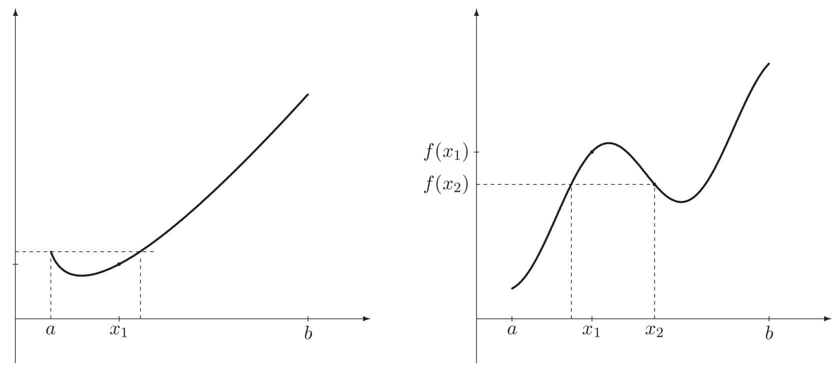
Definizione 30 *Siano X, Y spazi topologici.*
*Una funzione $f : X \to Y$ è detta **omeomorfismo** se è continua, biiettiva e la sua inversa $f^{-1} : Y \to X$ è pure continua.*
X e Y si dicono omeomorfi se esiste un omeomorfismo tra di essi.

Esercizi.

- Entro una data famiglia di spazi topologici, l'essere omeomorfi è una relazione di equivalenza.
- La funzione $f : \mathbb{R} \to]-1,1[$ definita da:

$$f(t) = \frac{t}{1+|t|}$$

  è un omeomorfismo.
  L'inversa è: $f^{-1}(s) = \frac{s}{1-|s|}$
- Due intervalli aperti di $\mathbb{R}$ sono sempre omeomorfi.
- ogni omeomorfismo tra due intervalli di $\mathbb{R}$ è necessariamente una funzione monotona (quindi devono essere entrambi aperti, entrambi chiusi,...).



Esercizio. Ogni biiezione monotona tra intervalli di $\tilde{\mathbb{R}}$ è un omeomorfismo.

Esempio. La **retta estesa**

$$\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

viene ordinata dall'ordine usuale di $\mathbb{R}$, con le condizioni aggiuntive che $+\infty$ sia massimo e che $-\infty$ sia minimo.
$\tilde{\mathbb{R}}$ viene topologizzato assumendo come base di aperti gli usuali aperti di $\mathbb{R}$ e in più gli intervalli del tipo $[-\infty, a[$ e $]b, +\infty]$;
questi ultimi formano una base di intorni rispettivamente di $-\infty$ e $+\infty$.
Osservare che $\mathbb{R}$ è un sottospazio aperto di $\tilde{\mathbb{R}}$.
La funzione $g : \tilde{\mathbb{R}} \to [-1,1]$ definita da

$$g(t) = \frac{t}{1+|t|} \text{ se } t \in \mathbb{R}, \quad g(-\infty) = -1, \quad g(+\infty) = 1$$

è un omeomorfismo:
nei punti di $\mathbb{R}$ la g coincide con la f precedente;
agli estremi si verifica direttamente (con gli intorni, fare un grafico).
$\tilde{\mathbb{R}}$ è metrizzabile con la metrica:

$$d_g(x,y) = |g(x) - g(y)|$$

Compattificazione con un punto di $\mathbb{R}$:

$$\alpha\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Gli aperti sono gli aperti di $\mathbb{R}$ e i complementari in $\alpha\mathbb{R}$ dei sottoinsiemi chiusi e limitati di $\mathbb{R}$.
Verificare che effettivamente così si ha una topologia su $\alpha\mathbb{R}$, che induce la topologia usuale su $\mathbb{R}$.
Una successione di numeri reali $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ha limite ∞ in $\alpha\mathbb{R}$ se e solo se $(|x_j|)_{j\in\mathbb{N}}$ ha limite $+\infty$ in $\tilde{\mathbb{R}}$.
Dimostrare che è continua la funzione $f : \tilde{\mathbb{R}} \to \alpha\mathbb{R}$ definita da:

$$f(t) = t \text{ se } t \in \mathbb{R}, \qquad f(+\infty) = f(-\infty) = \infty$$

(la funzione f incolla gli estremi di $\tilde{\mathbb{R}}$).

Dimostriamo che $\alpha\mathbb{R}$ è omeomorfo al circolo:

$$\mathbb{S}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 1\}$$

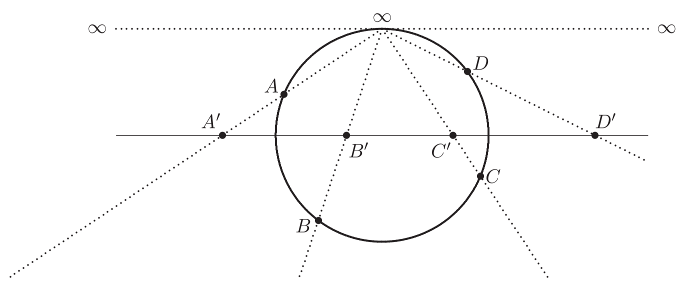
tramite un omeomorfismo che manda il punto $(0, 1)$ nel punto ∞ (proiezione stereografica).
Dimostrazione. Si consideri la retta passante per il punto $(0, 1)$ e qualsiasi punto $(a, b) \in \mathbb{S}_1$. Essa ha equazione $(1 - b)x + ay = a$. Essa interseca l'asse delle ascisse nel punto $\sigma(a, b) = \frac{a}{1-b}$ se $(a, b) \neq (0, 1)$. Se $(a, b) = (0, 1)$ definiamo $\sigma(a, b) = \infty$.
σ è una biiezione da $\mathbb{S}_1$ ad $\alpha\mathbb{R}$ (v. figura). σ è continua nei punti diversi da $(0, 1)$ perché rapporto di funzioni continue con denominatore diverso da 0 $(\mathrm{pr}_1, 1 - \mathrm{pr}_2)$. Che σ sia continua in $(0, 1)$ si vede osservando che:

$$|\sigma(a, b)| = \frac{|a|}{1 - b} = \frac{\sqrt{1 - b^2}}{1 - b} = \sqrt{\frac{1 + b}{1 - b}} \to \infty$$

per $b \to 1^-$.
Un conto analogo mostra che l'inversa di σ è data, per x reale, da:

$$\sigma^{-1}(x) = \left(\frac{2x}{1 + |x|^2}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1}\right)$$

Si ha poi $\sigma^{-1}(\infty) = (0, 1)$.
Non è difficile dimostrare che anche σ^{-1} è continua (v. figura). $\square$



Compattificazione con un punto di $\mathbb{R}^2$:

$$\alpha\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$$

Gli aperti sono gli aperti di $\mathbb{R}^2$ e i complementari in $\alpha\mathbb{R}^2$ dei sottoinsiemi chiusi e limitati di $\mathbb{R}^2$.
Verificare che effettivamente così si ha una topologia su $\alpha\mathbb{R}^2$, che induce la topologia usuale su $\mathbb{R}^2$.
Una successione di punti del piano $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ha limite ∞ in $\alpha\mathbb{R}^2$ se e solo se $(|p_j|)_{j\in\mathbb{N}}$ ha limite $+\infty$ in $\tilde{\mathbb{R}}$.

Si può dimostrare che $\alpha\mathbb{R}^2$ è omeomorfo alla sfera:

$$\mathbb{S}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

tramite un omeomorfismo che manda il punto $(0, 0, 1)$ nel punto ∞ (proiezione stereografica). Tale omeomorfismo manda l'emisfero australe nel disco dei punti del piano di modulo ≤ 1 e l'emisfero boreale nel complementare di tale disco unito $\{\infty\}$.

Proposizione 31 *Sia $f : X \to Y$ una funzione continua, ove Y è di Hausdorff e sia $c \in Y$. Allora l'insieme:*

$$f^{\leftarrow}(\{c\}) = \{x \in X : \ f(x) = c\}$$

è un chiuso di X.

In altri termini, gli *insiemi di livello* di una funzione continua sono sottoinsiemi chiusi del dominio.

Proposizione 32 *Siano $f, g : X \to Y$ funzioni continue.*
Se Y è di Hausdorff, l'insieme:

$$C = \{x \in X : \ f(x) = g(x)\}$$

è chiuso in X.

Basta dimostrare che $X \setminus C$ è aperto.
Se $p \notin C$, allora $f(p) \neq g(p)$ ...

Corollario 33 *Siano $f, g : X \to Y$ funzioni continue, ove Y è di Hausdorff.*
Sia D un sottoinsieme denso di X tale che $f(x) = g(x) \ \forall x \in D$.
Allora $f(x) = g(x) \ \forall x \in X$.

Definizione di limite. Sottinteso: $D \subseteq X$, $f : D \to Y$, $a \in D'$, $l \in Y$.

$$l \in \lim_{\substack{x \to a \\ x \in D}} f(x)$$

significa che:

per ogni intorno V di l esiste un intorno U di a tale che:

$$\forall \, x \in (U \setminus \{a\}) \cap D \text{ si ha } f(x) \in V$$

Se Y è di Hausdorff il limite, se esiste, è unico e si scrive:

$$l = \lim_{x \to a} f(x)$$

tenendo presente che il dominio è implicito nella funzione.

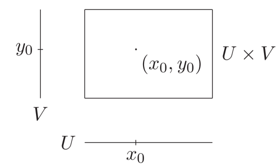
Prodotto di spazi topologici

Siano (X, τ) e (Y, σ) spazi topologici.
Sul prodotto cartesiano $X \times Y$ vogliamo porre una topologia in modo che:

un punto (x, y) sta in un intorno di (x_0, y_0)
$\iff$ x sta in un intorno di x_0 e y sta in un intorno di y_0.

Una base di intorni di (x_0, y_0) sarà pertanto della forma:

$$\{U \times V : \ U \in \mathcal{I}_{x_0}, \ V \in \mathcal{I}_{y_0}\}$$



Questa topologia si chiama **topologia prodotto**.
Se $\mathcal{A}$ è una base per gli aperti di τ e $\mathcal{B}$ è una base per gli aperti di σ, allora una base per gli insiemi aperti nella topologia prodotto di $X \times Y$ è data da:

$$\{A \times B : \ A \in \mathcal{A}, \ B \in \mathcal{B}\}$$

Se X e Y sono metrizzabili dalle metriche d_X e d_Y, allora la topologia prodotto è metrizzabile ad esempio dalla metrica d_∞ così definita:

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), \ d_Y(y_1, y_2)\}$$

È facile vedere che nella metrica prodotto d_∞ la palla di centro (x_0, y_0) e raggio r è data da:

$$B_{d_\infty}((x_0, y_0), r[= B_{d_X}(x_0, r[\times B_{d_Y}(y_0, r[$$

Osservazione. Anche le metriche d_1, d_2 definite in modo analogo alla metrica del reticolato e alla metrica euclidea inducono la topologia prodotto, ragionando in modo analogo all'osservazione importante di pag. 10.

Proposizione 34 *Per ogni $j \in \mathbb{N}$ sia $p_j = (x_j, y_j)$ un punto di $X \times Y$. Allora $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge a $l = (l_1, l_2)$ se e solo se $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge a l_1 e $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge a l_2.*

Consideriamo ora le proiezioni canoniche:

$$\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X, \qquad \mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$$

definite da:

$$\mathrm{pr}_X(x,y) = x, \qquad \mathrm{pr}_Y(x,y) = y$$

(a volte pr_1 e pr_2).
Una funzione si dice **aperta** se manda ogni aperto (del dominio) in un aperto (del codominio).

Proposizione 35 *Se $X \times Y$ è munito della topologia prodotto, allora le proiezioni canoniche pr_X e pr_Y sono funzioni continue e aperte.*

Dimostrazione. 1) pr_X è continua: $\mathrm{pr}_X^{\leftarrow}(A) = A \times Y$.
2) pr_X è aperta perché manda un intorno di base in un intorno:

$$\mathrm{pr}_X(U \times V) = U$$

□

Esercizio. Osservare che la topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$ è la topologia prodotto.
Dimostrare che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = xy$ è continua e che pertanto $\{(x,y) : \ xy = 1\}$ è chiuso in $\mathbb{R}^2$.
Dedurre che le proiezioni non sono in generale funzioni chiuse (una funzione si dice chiusa se manda chiusi in chiusi).

D'ora in poi il prodotto sarà dotato della topologia prodotto.

Osservazione. Siano X e Y spazi topologici e E sottospazio di X. La topologia prodotto di $E \times Y$ coincide con la topologia relativa indotta da $X \times Y$.
Sia $x_0 \in X$.
Allora $\{x_0\} \times Y$ è omeomorfo a Y tramite la proiezione pr_Y.

Notazione. Se $g : X \to Y_1 \times Y_2$ è una funzione, allora

$$g(x) = (g_1(x), g_2(x)) \quad \forall\, x \in X$$

ove $g_1 = \mathrm{pr}_1 \circ g$ e $g_2 = \mathrm{pr}_2 \circ g$ sono dette le **componenti** di g.
Scriveremo anche:

$$g = (g_1, g_2)$$

Viceversa, se $f_1 : X \to Y_1$ e $f_2 : X \to Y_2$ sono due mappe, si definisce la **mappa diagonale**:

$$(f_1 \times f_2)(x) = (f_1(x), f_2(x))$$

Ogni mappa a valori in un prodotto è la diagonale delle sue componenti.

Proposizione 36 *Sia $g : X \to Y_1 \times Y_2$ una funzione;
g è continua $\iff$ le sue componenti $g_1 = \mathrm{pr}_1 \circ g$ e $g_2 = \mathrm{pr}_2 \circ g$ sono continue.*

Dimostrazione.

- Se g è continua allora g_1 è continua perché composizione di funzioni continue.
- Se g_1 e g_2 sono continue, siccome

$$g^{\leftarrow}(U \times V) = g_1^{\leftarrow}(U) \cap g_2^{\leftarrow}(V)$$

si ottiene la continuità di g facendo variare U e V tra gli aperti di Y_1 e Y_2.

□

La topologia prodotto e i risultati sopra esposti si possono estendere ai prodotti finiti di spazi topologici.
Se $(X_j, \tau_j)_{1\le j\le m}$ sono spazi topologici, una base per la topologia prodotto sul prodotto cartesiano
$$\prod_{j=1}^{m} X_j$$
è data dagli insiemi del tipo:
$$\prod_{j=1}^{m} A_j, \quad \text{al variare di } A_j \in \tau_j.$$

- Le proiezioni pr_j sono continue e aperte;
- una funzione g a valori in un prodotto è continua $\iff$ tutte le componenti
$$g_j = \mathrm{pr}_j \circ g$$
sono continue;
- un prodotto di metrizzabili è metrizzabile;

Esercizi e complementi sul prodotto

Esercizio. Dati $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, dimostrare che:
$$\mathrm{cl}_{X\times Y}(A \times B) = \mathrm{cl}_X(A) \times \mathrm{cl}_Y(B)$$
Dedurre che $A \times B$ è chiuso se e solo se A e B sono chiusi.

Esercizio. Sia $X = \mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea.
La funzione $+ : X \times X \to X$ definita da $(x, y) \to x + y$ è lipschitziana e quindi continua.
La funzione $\mathbb{K} \times X \to X$ definita da $(\lambda, x) \to \lambda x$ è continua.

Dato uno spazio normato X, consideriamo la sfera dei versori di X:
$$S_X = \{u \in X : \ \|u\| = 1\}$$
La mappa:
$$\sigma : X \setminus \{0\} \longrightarrow S_X \quad \text{definita da} \quad \sigma(x) = \frac{x}{\|x\|}$$
si chiama **proiezione radiale** o **segno**.

Esercizio. Dimostrare che la proiezione radiale σ è una funzione continua.
Dimostrare che la funzione $p : x \longrightarrow (\|x\|, \sigma(x))$ stabilisce un omeomorfismo di $X \setminus \{0\}$ su $]0, +\infty[\times S_X$.

Esercizio. Uno spazio topologico Y è di Hausdorff se e solo se la diagonale
$$\Delta_Y = \{(y, y) : \ y \in Y\}$$
è un sottoinsieme chiuso di $Y \times Y$.

Sia $f : X \to Y$ una funzione.
Il grafico di f è il sottoinsieme di $X \times Y$:
$$G = G_f = \{(x, f(x)) : \ x \in X\}$$
Si osservi che G_f è l'antiimmagine della diagonale Δ_Y tramite la mappa:
$$X \times Y \longrightarrow Y \times Y, \qquad (x, y) \longrightarrow (f(x), y)$$
Se f è continua, quest'ultima mappa è continua.
Perciò, se Y è di Hausdorff ($= \Delta_Y$ chiusa), il grafico è chiuso in $X \times Y$.

Proposizione 37 *Siano* X *e* Y *spazi topologici,* $f : X \to Y$ *una funzione continua.*
Allora il grafico G_f *(come sottospazio di* $X \times Y$*) è omeomorfo a* X *tramite la mappa diagonale*

$$x \to (x, f(x))$$

Se Y *è di Hausdorff, allora* G_f *è chiuso in* $X \times Y$*.*