USO DELL'ORTOGONALITÀ E DELLE UNITÀ APPROSSIMANTI

Umberto Marconi

Dipartimento di Matematica Pura e Applicata – Padova

1 C_infinito_ci

Consideriamo la funzione reale di variabile reale:

$$\psi(s) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{s^2-1}\right) & \text{per } |s| < 1 \\ 0 & \text{per } |s| \geq 1 \end{cases}$$

Osserviamo che la funzione ψ è di classe $\mathcal{C}^\infty$, a supporto compatto, pari, non negativa e $\psi(0) > 0$.
Fissato ξ in $\mathbb{R}^n$, consideriamo per ogni $R > 0$ la funzione ψ_R così definita in coordinate sferiche di centro ξ, con $r = |x - \xi|$:

$$\psi_R(r) = R^{-n}\psi\left(\frac{r}{R}\right)$$

La funzione ψ_R ha supporto contenuto nella palla B_R di centro ξ e raggio R ed è di classe $\mathcal{C}^\infty$ perché r^2 è di classe $\mathcal{C}^\infty$.
Calcoliamo l'integrale della funzione non negativa ψ_R, usando le coordinate sferiche e tenendo conto che ψ_R è nulla per $r \geq R$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_R(x)\,dx &= \int_0^{+\infty} r^{n-1}R^{-n}\psi\left(\frac{r}{R}\right)dr \int_{\mathbb{S}^{n-1}} 1 d\sigma = \\ &= \sigma_{n-1}\int_0^R R^{-n}r^{n-1}\psi\left(\frac{r}{R}\right)dr \\ &\overset{r=Rs}{=} \sigma_{n-1}\int_0^1 R^{-n}R^{n-1}s^{n-1}\psi(s)R\,ds = \\ &= \sigma_{n-1}\int_0^1 s^{n-1}\psi(s)\,ds \end{aligned}$$

L'integrale della famiglia di funzioni ψ_R ha dunque un valore costante positivo c indipendente da R. Se consideriamo ora le funzioni $k_R(r) = c^{-1}\psi_R(r)$, esse hanno tutte le proprietà di ψ_R e il loro integrale è costantemente uguale a 1.
Si osservi che al tendere di R a 0^+ il supporto di queste funzioni si strizza a ξ e il valore massimo assunto in ξ tende a $+\infty$ (i grafici sono *stalagmiti* sempre più sottili e allungate).
Le funzioni di questo tipo si chiamano *mollificatori*.
Nel nostro caso, se le scriviamo in coordinate cartesiane abbiamo:

$$k_R(x - \xi) = c^{-1}R^{-n}\psi(R^{-1}|x - \xi|)$$

Sia D un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ e sia f una funzione scalare continua su D.
Fissato $\xi \in D$, sia R_0 tale che la palla di centro ξ e raggio R_0 è tutta contenuta in D. Per ogni $R < R_0$ definiamo:

$$(k_R * f)(\xi) = \int_D f(x) k_R(x-\xi)\, dx$$

La funzione integranda è nulla per $|x-\xi| \geq R$. Dimostriamo che:

$$\lim_{R \to 0^+} (k_R * f)(\xi) = f(\xi)$$

Fissato $\varepsilon > 0$, scegliamo $R_1 > 0$ tale che $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ per ogni $x \in B_{R_1}$. La differenza fra l'argomento del limite e $f(\xi)$ è:

$$\begin{aligned} & \int_{B_R} f(x) k_R(x-\xi)\, dx - f(\xi) \cdot 1 = \\ = \ & \int_{B_R} f(x) k_R(x-\xi)\, dx - f(\xi) \cdot \int_{B_R} k_R(x-\xi)\, dx = \\ = \ & \int_{B_R} (f(x) - f(\xi)) k_R(x-\xi)\, dx \end{aligned}$$

Vista la scelta di R_1, per ogni $R < R_1$ il modulo di tutta l'espressione è maggiorato da:

$$\int_{B_R} |f(x) - f(\xi)| k_R(x-\xi)\, dx \leq \int_{B_R} \varepsilon k_R(x-\xi)\, dx = \varepsilon$$

La definizione di limite conclude la dimostrazione.

Supponiamo ora che D sia limitato e consideriamo lo spazio lineare $\mathcal{C}(\overline{D})$ costituito dalle funzioni continue sulla chiusura di D. Esso contiene come sottospazio lineare proprio lo spazio lineare $\mathcal{C}_c^\infty(D)$ delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$ a supporto compatto contenuto in D (per continuità tali funzioni si possono estendere alla frontiera ∂D).
Consideriamo su $\mathcal{C}(\overline{D})$ il prodotto scalare di $L^2(D)$.

Corollario 1 *L'ortogonale di $\mathcal{C}_c^\infty(D)$ in $\mathcal{C}(\overline{D})$ è nullo, cioè se $\int_D fg = 0$ per ogni $g \in \mathcal{C}_c^\infty(D)$, allora f è identicamente nulla.*

Dimostrazione. Poiché le funzioni $k_R(x-\xi)$ appartengono a $\mathcal{C}_c^\infty(D)$ per $R < R_0$, dall'ipotesi si ha che $(k_R * f)(\xi) = 0$ per ogni $R < R_0$ e passando al limite si ottiene $f(\xi) = 0$. La conclusione segue dall'arbitrarietà di ξ.

Da questo corollario vogliamo dedurre che $\mathcal{C}_c^\infty(D)$ è denso in $L^2(D)$.
Per i teoremi di decomposizione ortogonale negli spazi di Hilbert si ha:

$$L^2(D) = (\mathcal{C}_c^\infty(D))^\perp \oplus \overline{\mathcal{C}_c^\infty(D)}$$

Intersecando con $\mathcal{C}(\overline{D})$ otteniamo:

$$\mathcal{C}(\overline{D}) = \Big((\mathcal{C}_c^\infty(D))^\perp \cap \mathcal{C}(\overline{D}) \Big) \oplus \Big(\overline{\mathcal{C}_c^\infty(D)} \cap \mathcal{C}(\overline{D}) \Big)$$

Il corollario assicura che il primo addendo è nullo e quindi:

$$\mathcal{C}(\overline{D}) \subseteq \overline{\mathcal{C}_c^\infty(D)}$$

Poiché $\mathcal{C}(\overline{D})$ è denso in $L^2(D)$, passando alla chiusura del termine a sinistra otteniamo:

$$L^2(D) = \overline{\mathcal{C}(\overline{D})} \subseteq \overline{\mathcal{C}_c^\infty(D)}$$

e dunque $\mathcal{C}_c^\infty(D)$ è denso in $L^2(D)$.

Osservazione. Diamo per scontato, senza dimostrazione, che $\mathcal{C}_c^\infty(D)$ è denso in $L^p(D)$, $1 \leq p < +\infty$, anche se D non è limitato.

2 Principio di Dirichlet

Quanto segue è solo un conto, le cui motivazioni sono assolutamente incomprensibili senza aver studiato il paragrafo 4.83 a pag. 246-247 di [Taylor].
Siano $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ e (f_1, f_2) come in 4.83 di [Taylor]. Fissata $f_0 \in \mathcal{F}$, l'insieme delle funzioni che coincidono con f_0 su ∂D è la classe laterale $f_0 + \mathcal{G}$ (varietà affine). Supponiamo esista $f \in (f_0 + \mathcal{G})$ di norma minima. Ovviamente $f_0 + \mathcal{G} = f + \mathcal{G}$ perché $f - f_0 \in \mathcal{G}$. Possiamo esprimere la nostra ipotesi assumendo che f sia l'elemento di norma minima nel chiuso convesso $f + \mathcal{G}$. Tenendo conto che $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$, il quadrato della norma di un elemento di questa classe laterale è dato da:

$$\mathcal{N}^2(f+g) = \int_D (\nabla f + \nabla g) \cdot (\nabla f + \nabla g)\, dx + \int_{\partial D} (f+g)^2 d\sigma$$

Dobbiamo imporre che $\mathcal{N}^2$ sia minima in f. Fissato $g \in \mathcal{G}$, se ciò succede la derivata direzionale lungo la retta $(f + tg)_{t \in \mathbb{R}}$ deve essere nulla per $t = 0$. Scriviamo:

$$\mathcal{N}^2(f+tg) = \int_D (\nabla f + t\nabla g) \cdot (\nabla f + t\nabla g)\, dx + \int_{\partial D} (f+tg)^2 d\sigma$$

Tenendo conto che g è nulla su ∂D si ottiene:

$$\mathcal{N}^2(f+tg) = \int_D (\nabla f + t\nabla g) \cdot (\nabla f + t\nabla g)\, dx + \int_{\partial D} f^2 d\sigma$$

Deriviamo rispetto a t, osservando che tutto è uniformemente continuo, perché $\overline{D}$ è compatta, e dunque l'operatore di derivazione si può portare dentro all'integrale:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{N}^2(f+tg) = 2\int_D (\nabla f + t\nabla g) \cdot \nabla g\, dx + 0$$

Per $t = 0$ questa derivata deve essere nulla e quindi otteniamo:

$$\int_D (\nabla f) \cdot (\nabla g) = 0$$

Applicando l'identità di Green (alias per parti) si ha:

$$\int_D (\nabla g) \cdot (\nabla f) = \int_{\partial D} g(\nabla f) \cdot \nu\, d\sigma - \int_D g(\nabla^2 f)\, dx$$

Il primo addendo del secondo termine è nullo perché g è nulla su ∂D. Poiché la derivata deve essere nulla lungo tutti i vettori direttori $g \in \mathcal{G}$, otteniamo che $\int_D (\Delta f) g = 0$ per ogni funzione g di classe $\mathcal{C}^2$ su $\overline{D}$ e nulla su ∂D. Poiché $\mathcal{C}_c^\infty(D) \subseteq \mathcal{G}$, ne consegue per il Corollario 1 che $\Delta f = 0$.
In conclusione abbiamo dimostrato che se esiste l'elemento di norma minima in $f_0 + \mathcal{G}$, tale elemento è una funzione armonica h e dunque $f_0 = g \oplus h$, ove h è la proiezione di f_0 su $\mathcal{H}$.

3 Unità approssimanti

Consideriamo le funzioni $k_R(\xi - x)$ definite nel primo paragrafo (si tenga presente che la funzione generatrice ψ è pari). Esse hanno le seguenti proprietà:

i) sono di classe $\mathcal{C}^\infty$ in x e in ξ;

ii) fissato ξ, il supporto di K_R è contenuto in B_R, palla di centro ξ e raggio R;

iii) $\int_{\mathbb{R}^n} K_R(\xi - x)\,dx = \int_{B_R} K_R(\xi - x)\,dx = 1$.

Sia D un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$.
Se f è una funzione reale localmente integrabile su D e $R < R_0$, l'espressione

$$(k_R * f)(\xi) = \int_D f(x)k_R(\xi - x)\,dx = \int_{B_R} f(x)k_R(\xi - x)\,dx$$

definisce una funzione per $\xi \in D_{R_0} = \{\xi \in D :\ \mathrm{dist}(\xi, \partial D) > R_0\}$. Una maggiorazione immediata mostra infatti che la funzione integranda è sommabile su B_R.
L'operazione $*$ si chiama *prodotto di convoluzione*.
Poiché la funzione $K_R(\xi - x)$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ in ξ, i teoremi di derivabilità per integrali dipendenti da parametro assicurano che $K_R * f$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$. Per questo i nuclei integrali K_R si chiamano mollificatori.
Nel primo paragrafo abbiamo dimostrato che se f è continua in ξ allora:

$$\lim_{R\to 0^+} (k_R * f)(\xi) = \lim_{R\to 0^+} \int_D f(x)k_R(\xi - x)\,dx = f(\xi).$$

Si dimostra che se $f \in L^q(D)$, allora $K_R * f \in L^q(D_{R_0})$ e che inoltre tali convoluzioni tendono a f nella norma q se $R \to 0^+$.

Supponiamo ora che D sia limitato e consideriamo lo spazio lineare $C = \mathcal{C}(\overline{D})$ con la norma del massimo. Fissato $p \in D$, possiamo considerare il funzionale $\delta_p \in C'$ definito da:

$$\delta_p(f) = f(p)$$

È quasi ovvio che la norma operatoriale di δ_p è uguale a 1.
Il funzionale δ_p si chiama *delta di Dirac*, o *massa unitaria concentrata in p*.
Se $R < \mathrm{dist}(p, \partial D)$, possiamo considerare anche i funzionali

$$K_R^p(f) = (k_R * f)(p) = \int_D f(x)k_R(p - x)\,dx$$

Questi funzionali hanno norma operatoriale $\int_D K_R(p - x)\,dx = 1$.
Poiché f è continua abbiamo inoltre:

$$\lim_{R\to 0^+} K_R^p(f) = \delta_p(f) \quad \text{per ogni } f \in C.$$

Se R varia in una successione infinitesima, la successione di funzionali K_R^p converge alla δ_p su ogni "punto" $f \in C$.
Otteniamo così che la delta di Dirac, che non è una funzione, si può pensare come *limite debole* dei nuclei integrali K_R^p. Per questo motivo le funzioni K_R si chiamano *unità approssimanti.* Siccome tali unità hanno valore massimo che tende a $+\infty$ per $R \to 0^+$, se uno pensa alla delta come funzione, dice che "la delta vale 0 in tutti i punti tranne p, dove vale $+\infty$".
Osservazione. Le ipotesi che abbiamo messo sulle unità approssimanti sono un po' troppo restrittive. Per una caratterizzazione si veda [Lax, Cap. 11, Teorema 1].

Bibliografia

[Lax] P. Lax, *Functional Analysis,* Wiley-Interscience (2002).

[Taylor] A. E. Taylor, *Introduction to Functional Analysis*, John Wiley&Sons Inc., New York (1964).