Fatti semplici ma importanti

Proposizione 1 *Siano x e y numeri reali con $x < y$; preso un numero reale $\delta > 0$ tale che $\delta < y - x$, esiste un intero $m \in \mathbb{Z}$ tale che $x < m\delta < y$.*

Dimostrazione. Se $x < 0 < y$ basta prendere $m = 0$.
se $x = 0 < y$ basta prendere $m = 1$.
Supponiamo $0 < x < y$. Sia:

$$m = \min\{n \in \mathbb{N} : \ x < n\delta\}$$

Si osservi che l'insieme è non vuoto per l'archimedeità di $\mathbb{R}$ e che il minimo esiste per il buon ordinamento di $\mathbb{N}$. Ovviamente $m \geq 1$. Per definizione di minimo $(m-1)\delta \leq x$; se fosse $y \leq m\delta$ si avrebbe:

$$(m-1)\delta \leq x < y \leq m\delta$$

Se queste ultime disuguaglianze fossero vere, la differenza degli estremi sarebbe $\geq$ della differenza dei medi e quindi:

$$\delta = m\delta - (m-1)\delta \geq y - x$$

contro l'ipotesi.
Rimane il caso $x < y \leq 0$. Poiché in tal caso $0 \leq -y < -x$, per i casi precedenti esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $-y < n\delta < -x$ o equivalentemente $x < (-n)\delta < y$. In questo caso $-n$ è l'intero m cercato.

Definizione 2 *Un sottoinsieme I di $\mathbb{R}$ si dice* intervallo *se comunque presi due numeri x_1 e x_2 appartenenti a I, tutto l'intervallo di estremi x_1 e x_2 è contenuto in I.*

Proposizione 3 *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e siano $a = \inf_{\tilde{\mathbb{R}}} I$ e $b = \sup_{\tilde{\mathbb{R}}} I$. Allora:*

$$]a, b[\subseteq I \subseteq [a, b]$$

Dimostrazione. La seconda inclusione è ovvia. Dimostriamo la prima.
Sia $z \in]a, b[$. Allora $a < z < b$. Per la seconda proprietà dell'estremo inferiore esiste $x \in I$ tale che $a \leq x < z$; per la seconda proprietà dell'estremo superiore esiste $y \in I$ tale che $z < y \leq b$. Poiché l'intervallo $[x, y]$ è contenuto in I (dato che x e y stanno in I), si ottiene che z deve appartenere a I.

Esercizio. Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$ e E un sottoinsieme di I. Dimostrare che E è denso (per l'ordine) in I se e solo se per ogni x_1, $x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, esiste $z \in E$ tale che $x_1 \leq z \leq x_2$.
Dimostrare inoltre che se E è denso in I allora $\inf E = \inf I$ e $\sup E = \sup I$, ove inf e sup sono fatti in $\tilde{\mathbb{R}}$.

Proposizione 4 *Siano I e J intervalli di $\mathbb{R}$ e $I \xmapsto{f} J$ una funzione monotona suriettiva da I su tutto J. Se E è un sottoinsieme di I denso in I, allora l'immagine $f(E) = \{f(x) : \ x \in E\}$ è denso in J.*

Dimostrazione. Supponiamo f crescente. Siano y_1, $y_2 \in J$, per esempio con $y_1 < y_2$. Per la suriettività esistono x_1, $x_2 \in I$ tali che $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Siccome f è crescente si deve avere $x_1 < x_2$. Per la densità di E in I esiste $z \in E$ tale che $x_1 < z < x_2$. Dalla crescenza di f si ottiene $y_1 \leq f(z) \leq y_2$, come volevasi.