PRODOTTI INFINITI

Data una famiglia $\{Y_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ di spazi topologici, consideriamo il prodotto cartesiano $Y = \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ e la famiglia delle proiezioni $\{\mathrm{pr}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$.
La **topologia prodotto** su Y è la topologia meno fine che rende continue tutte le proiezioni pr_λ. Tale topologia si chiama **topologia prodotto**.
Una base per la topologia prodotto è costituita dagli insiemi della forma:

$$\bigcap_{\lambda\in S} \mathrm{pr}_\lambda^{\leftarrow}(W_\lambda)$$

al variare di S fra i sottoinsiemi finiti di Λ e W_λ fra gli aperti di Y_λ.

Proposizione 1 *La famiglia di tutti gli insiemi della forma $\prod_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda$, dove W_λ è un sottoinsieme aperto di Y_λ e $W_\lambda \neq Y_\lambda$ solo per un insieme finito di indici $\lambda \in \Lambda$ è una base per la topologia prodotto.*

Proposizione 2 *Un prodotto di spazi di Hausdorff è uno spazio di Hausdorff.*

Fatto importante. Se $A_\lambda \subseteq Y_\lambda \,\forall\lambda \in \Lambda$, allora:

$$\overline{\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} = \prod_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}$$

Osservazione. Ogni proiezione pr_λ è una funzione continua e aperta.

Proposizione 3 *Sia $Z = \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ e sia $f : X \to Z$ una funzione.*
Allora f è continua $\iff$ $\mathrm{pr}_\lambda \circ f$ è continua per ogni $\lambda \in \Lambda$.

Se $f : D \to \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ è una funzione, le componenti di f sono le funzioni $f_\lambda = \mathrm{pr}_\lambda \circ f$.
D'ora in poi si suppone che tutti gli spazi siano di Hausdorff.

Corollario 4 *Siano D un sottospazio di X, a un punto di accumulazione per D in X e $f : D \to \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ una funzione. Si ha:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \quad\iff\quad \lim_{x\to a} f_\lambda(x) = y_\lambda \;\forall\, \lambda \in \Lambda$$

Se $f_\lambda : X \to Y_\lambda$ è una famiglia di mappe, possiamo considerare la **mappa diagonale** che a ogni punto x associa il punto $\Big(f_\lambda(x)\Big)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$.
Tale mappa si indica con il simbolo $\Delta_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$.
Essa è continua se e solo se tutte le f_λ sono continue.
Spesso si ha la situazione $Y_\lambda = Y$ per ogni $\lambda \in \Lambda$. In tal caso la topologia prodotto su Y^Λ si chiama anche **topologia della convergenza puntuale**. La motivazione è la seguente.
Un elemento di Y^Λ è una funzione $f : \Lambda \to Y$ che a ogni λ associa un valore $f(\lambda) \in Y$. Se vogliamo fissare un intorno di f, basta considerare un numero finito di indici $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ e intorni V_{λ_j} dei punti $f(\lambda_j)$ per ogni $j = 1, \ldots, k$; viene così determinato un intorno di f a cui appartengono tutte e sole le funzioni $g : \Lambda \to Y$ che soddisfano le condizioni:

$$g(\lambda_j) \in V_{\lambda_j} \quad \forall\, j = 1, \ldots, k$$

Si ottiene facilmente la seguente proposizione.

Proposizione 5 *Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni da Λ a Y e f una funzione da Λ a Y. Si ha $\lim_n f_n = f$ in Y^Λ se e solo se per ogni $\lambda \in \Lambda$ si ha $\lim_n f_n(\lambda) = f(\lambda)$.*

Su $Y^{\mathbb{N}}$ (successioni a valori in Y) un intorno di una successione $a = (a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ si ottiene, al variare di n, fissando i primi n indici $1, \ldots, n$ e fissando un intorno V_j di a_j per ognuno di tali indici; l'intorno così individuato è costituito dalle successioni b tali che $b_j \in V_j \ \forall\, j = 1, \ldots, n$.

Osservazione. Se d è una metrica su Y, allora la metrica $\tilde{d} = d \wedge 1$ definita da $\tilde{d}(y, z) = \min\{d(y, z), 1\}$ induce la stessa topologia della metrica d (perché ha le stesse palle di raggio minore di 1).

Sia $I = [0, 1]$ l'intervallo unitario di $\mathbb{R}$.
Si chiama **cubo di Hilbert** lo spazio $I^{\mathbb{N}}$ costituito dalle successioni a valori in I con la topologia prodotto. Esso è metrizzabile, come assicura il prossimo teorema.

Teorema 6 *Se Y è metrizzabile allora $Y^{\mathbb{N}}$ è metrizzabile.*

Dimostrazione. Per l'osservazione predente possiamo supporre che lo spazio Y sia metrizzabile da una metrica d tale che $\operatorname{diam} Y \leq 1$. Su $Y^{\mathbb{N}}$ consideriamo la metrica ρ così definita:

$$\rho(a, b) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} d(a_j, b_j)$$

(Perché la serie converge?)
La verifica che ρ è una metrica è standard. Dobbiamo dimostrare che la topologia τ_ρ coincide con la topologia prodotto.
Poichè $2^{-j} d(a_j, b_j) \leq \rho(a, b)$, sia ha che la proiezione pr_j è lipschitziana e quindi continua per la topologia τ_ρ su $Y^{\mathbb{N}}$; poiché ciò è vero per ogni indice j, la topologia τ_ρ è più fine della topologia prodotto.
Rimane da dimostrare che, comunque presa una palla $B_\rho(a, \varepsilon]$, intorno di una successione a nella topologia τ_ρ, essa contiene un intorno di a nella topologia prodotto. Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $\sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{-j} < \frac{\varepsilon}{2}$. Sia V l'intorno nella topologia prodotto costituito dalle successioni b tali che $2^{-j} d(b_j, a_j) < \frac{\varepsilon}{2n}$ per ogni $j = 1, \ldots, n$. Se $b \in V$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \rho(b, a) &= \sum_{j=1}^{n} 2^{-j} d(b_j, a_j) + \sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{-j} d(b_j, a_j) \leq \\ &\leq n \frac{\varepsilon}{2n} + \sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{-j} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

e dunque $V \subseteq B(a, \varepsilon]$, come volevasi. □

Osservazione. Un'altra metrica che induce la topologia prodotto (supponendo $\operatorname{diam} Y \leq 1$) può essere costruita nel modo seguente.
Se $a, b \in Y^{\mathbb{N}}$, la successione $(\frac{1}{j} d(a_j, b_j))_{j\in\mathbb{N}}$ è positiva e infinitesima e quindi ammette massimo. La posizione

$$\sigma(a, b) = \max_{j\in\mathbb{N}} \{\frac{1}{j} d(a_j, b_j) : \ j \in \mathbb{N}\}$$

definisce una metrica su $Y^{\mathbb{N}}$ (verificarlo). Usando tecniche analoghe a quelle della dimostrazione precedente, si può dimostrare che questa metrica induce la topologia prodotto.

Osservazione. Con la stessa tecnica si può dimostrare che un prodotto numerabile di spazi metrizzabili è ancora uno spazio metrizzabile.

Ricordiamo che una successione f a valori in un insieme Z è una funzione $f : \mathbb{N} \to Z$. Una sottosuccessione di f è una funzione $f^1 : \mathbb{N} \to Z$ tale che $f^1(j) = f(\nu(j))\ \forall\, j \in \mathbb{N}$, ove $\nu(j)$ è un'opportuna funzione strettamente crescente da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$.

Teorema 7 *Se Y è sequenzialmente compatto allora $Y^{\mathbb{N}}$ è sequenzialmente compatto.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che ogni successione f a valori in $Y^{\mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione convergente. Poiché Y è sequenzialmente compatto, si ha che $\mathrm{pr}_1 \circ f$ ammette una sottosuccessione convergente in Y; esiste pertanto una sottosuccessione f^1 di f tale che $\mathrm{pr}_1 \circ f^1$ è convergente a un elemento $y_1 \in Y$. In modo analogo esiste una sottosuccessione f^2 di f^1 tale che $\mathrm{pr}_2 \circ f^2$ converge a un elemento $y_2 \in Y$.
Procedendo per induzione, si costruisce una successione di sottosuccessioni $f^1, f^2, \ldots, f^j, \ldots$ e una successione di elementi $y_1, y_2, \ldots, y_j, \ldots$ di Y tali che:

1) f^{j+1} è una sottosuccessione di f^j per ogni $j \in \mathbb{N}$;
2) $\mathrm{pr}_j \circ f^j$ converge a y_j per ogni $j \in \mathbb{N}$.

Sia g la sottosuccessione di f costruita mediante il seguente procedimento diagonale:

$$g(1) = f^1(1), \quad g(2) = f^2(2), \quad \ldots, \quad g(j) = f^j(j), \quad \ldots$$

Vogliamo dimostrare che la successione g converge nella topologia prodotto all'elemento $(y_1, \ldots, y_n, \ldots)$. Per il corollario 4, basta dimostrare che per ogni fissato $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$\lim_{j\to\infty} (\mathrm{pr}_n \circ g)(j) = y_n$$

Osserviamo che se $j \geq n$ la successione $g(j) = f^j(j)$ è una sottosuccessione della successione $f^n(j)$. Poiché $\mathrm{pr}_n \circ f^n$ converge a y_n, cioè $\lim_{j\to\infty}(\mathrm{pr}_n \circ f^n)(j) = y_n$, anche per la sottosuccessione $f^j(j)$ si ha:

$$\lim_{j\to\infty} (\mathrm{pr}_n \circ f^j)(j) = y_n$$

La conclusione si ha ricordando che $g(j) = f^j(j)$. $\square$

Osservazione. Se Y è metrizzabile e sequenzialmente compatto, allora anche $Y^{\mathbb{N}}$ risulta metrizzabile. Una dimostrazione più semplice della compattezza di $Y^{\mathbb{N}}$ può essere ottenuta dimostrando che se Y è completo e totalmente limitato allora anche $Y^{\mathbb{N}}$ è completo e totalmente limitato con una delle due metriche definite nel teor. 6 e nella successiva osservazione.

Osservazione. Con una tecnica analoga si dimostra che un prodotto numerabile di spazi sequenzialmente compatti è sequenzialmente compatto.

Corollario 8 *Il cubo di Hilbert $I^{\mathbb{N}}$ è metrizzabile e compatto.*

Dimostrazione. Essendo metrizzabile e sequenzialmente compatto, è compatto. $\square$

In realtà vale un teorema più generale, che non dimostreremo.

Teorema 9 (Tychonoff) *Un prodotto topologico qualunque di spazi compatti è uno spazio compatto.*

È interessante dimostrare il seguente risultato:

Teorema 10 *Il cubo di Hilbert $I^{\mathbb{N}}$ è omeomorfo a un sottospazio di $l^2 = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Sia $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un elemento di l^2 tale che $a_n > 0$ per ogni n (per esempio $a_n = \frac{1}{n}$).
Sia $Q \subseteq l^2$ costituito dalle successioni x tali che $|x_n| \leq a_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
Consideriamo la mappa $\varphi :\ I^{\mathbb{N}} \to Q$ definita da:

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) \xrightarrow{\varphi} (y_1 a_1, y_2 a_2, \ldots, y_n a_n, \ldots)$$

La mappa φ è ovviamente biiettiva. Poiché il dominio è compatto, per concludere che è un omeomorfismo, basta dimostrare che è continua.
Sia $\varepsilon > 0$ e sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j^2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Siano y e z due elementi di $I^{\mathbb{N}}$ tali che $|y_j - z_j|^2 a_j^2 < \frac{\varepsilon}{2n}$ per ogni $j = 1, \ldots, n$ (cioè z appartiene all'intorno di y nella topologia prodotto definito dalle condizioni sopra scritte sui primi n indici). Si ottiene allora:

$$\|\varphi(y) - \varphi(z)\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 (y_j - z_j)^2 \leq n\frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

come volevasi. $\square$

Osservazione. Sia $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un elemento di l^1 tale che $b_n > 0$ per ogni n (per esempio, $b_n = 2^{-n}$). Con una dimostrazione simile a quella del teor. 10, si ottiene che il cubo di Hilbert è omeomorfo a un sottospazio di l^1. Poiché l'immersione di l^1 in l^2 è continua, usando la compattezza del cubo di Hilbert si ottiene una dimostrazione alternativa del teor. 10.