Programma di Analisi Matematica 1 mod. A per Matematica.
Anno accademico 2008–2009

Docente: Umberto Marconi

Nella prova scritta occorre conoscere le definzioni e gli enunciati e saper applicare concetti e procedimenti nella risoluzione degli esercizi. Nella prova orale si devono conoscere anche le dimostrazioni.

Testi di riferimento:

- G. De Marco, *Analisi Uno*, Decibel-Zanichelli.
- U. Marconi, Dispense in rete all'indirizzo:
  `http://www.math.unipd.it/~umarconi/did.htm`.

1. Capitolo 0: analisi zero

I §§0, 1, 2, 3, 5 devono essere conosciuti integralmente perché costituiscono il bagaglio di base propedeutico al corso:

> numeri reali, coordinate ascisse, proprietà delle potenze, esponenziali e logaritmi; geometria analitica piana; trigonometria; funzioni, grafici, nomenclatura; funzioni polinomiali, funzioni razionali fratte, funzione potenza, funzione esponenziale, funzione logaritmo, funzioni trigonometriche e loro inverse; disequazioni; ordine e nozioni collegate.

§0.4. Il corpo reale, estremo superiore ed estremo inferiore **0.4.1,0.4.2**. Formulazioni equivalenti dell'assioma di completezza **0.4.3**. L'enunciato in 0.4.3 va completato con il contenuto della dispensina *Tagli di Dedekind* (non esistenza di lacune). Proprietà caratteristiche di sup e inf **0.4.5**. Classi contigue **0.4.6**. Esistenza delle radici con dimostrazione solo per la radice quadrata **dispensina**. Archimedeità, parte intera **0.4.8,0.4.9,0.4.10**. Densità **0.4.11**. (Saltare da 0.4.12 alla fine).

2. Capitolo 3: induzione

Il principio di induzione è svolto nel corso di Algebra.
La disuguaglianza di Bernoulli **3.2.2**. La disuguaglianza aritmetico-geometrica **3.4.1**. Conseguenze **3.4.3,3.5**. La successione esponenziale e il numero di Nepero **3.5**. Sottoinsiemi finiti **3.6.1**.

3. Capitolo 6: la topologia nella retta reale

Tutto a memoria: aperti, intervalli centrati, proprietà degli aperti, chiusi e proprietà, intorni, ogni chiuso inferiormente (superiormente) limitato ha minimo (ha massimo), topologia della retta estesa.

4. Capitolo 7: limite di successioni

Definizione di limite e caratterizzazioni **7.1 tutto, con definizioni ed enunciati a memoria**. Unicità del limite **7.2**. Sottosuccessioni **7.3**. Permanenza del segno **7.4**. Confronto **7.5**. Successioni limitate **7.6**. Carabinieri **7.7**. Infinitesimi **7.8**. Operazioni con i limiti, finiti e no **7.9,7.10,7.11,7.12**. Forme indeterminate **7.13**. Successioni monotone **7.14**. Molto bene il teorema fondamentale **7.14.1**. Successione aritmetica e successione geometrica **7.15**. Il criterio del rapporto e della radice **dispensina per Fisica *Successioni di numeri reali***. L'esponenziale naturale **7.16 tutto, anche le disuguaglianze**. Continuità dell'esponenziale ed esistenza del logaritmo **7.17.1,7.17.2**. Definizione di potenza **7.17.3**. Sottosuccessioni monotone **7.18**. Ogni successione reale ammette una sottosuccessione monotona **7.18.1**. Ogni successione reale limitata ammette una sottosuccessione convergente **7.18.2.**.

5. Capitolo 8: la topologia del piano

Aperti del piano **8.2**. Dischi aperti e caratterizzazione degli aperti tramite i dischi aperti **8.3.1,8.3.2**. Limite di una successione complessa **8.4 tutto**. Limite tramite le componenti **8.5 tutto**. Operazioni con i limiti **8.6,8.7 solo enunciati**. La successione geometrica **8.8**. Ogni successione complessa limitata ammette una sottosuccessione convergente **8.9.1 molto bene**.

6. Capitolo 10: altre nozioni di topologia

Le definizioni e gli enunciati di questo capitolo devono essere formulati pari pari anche nel piano complesso.
Chiusura, definizione e caratterizzazioni **10.1 tutto**. Punti di accumulazione, derivato, punti isolati **10.2 tutto**. Successioni e punti di accumulazione, successioni e punti di chiusura **10.3,10.4 tutto**. Compatti per successioni **definizione 10.5.1 e caratterizzazione 10.5.2, completata nella dispensina *Completezza e compattezza***. Teorema di Bolzano **10.8.1**. Interno e frontiera **10.9,10.10**.

7. Capitolo 11: limiti di funzioni

Il dominio può essere anche un sottoinsieme del piano $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, tranne negli enunciati in cui è essenziale l'ordine.
Definizione di limite e definizione alternativa **11.1.1,11.1.2**. Unicità **11.1.3**. Casistica, con le varie definizioni **11.2,11.3 tutto**. Limiti delle restrizioni, limiti destri e limiti sinistri **11.4 tutto**. Limite delle funzioni monotone **11.5 tutto, 11.5.1 molto bene**. Teoremi sui limiti **11.6**. Forme indeterminate ed esempi **11.7.1,11.7.2,11.7.3,11.7.4**. Cambiamento di variabile **11.7.5,11.7.11 senza dimostrazione**. Esercizi **11.7.6,11.7.7**. Limiti notevoli **11.8 tutto**.

8. Spazi metrici e topologici, dispensa in rete

Definizione di spazio metrico ed esempi. Metrica indotta. Palle aperte e palle chiuse. Funzioni lipschitziane. Distanza da un sottoinsieme. Diametro. Topologia di uno spazio metrico. Aperti e chiusi. Caratterizzazione degli aperti. Proprietà degli aperti e proprietà dei chiusi. Definizione di intorno di un punto. Proprietà degli intorni. Basi di intorni. Le tre metriche d_∞, d_1, d_2 nel piano cartesiano definiscono gli stessi intorni. Definizione di chiusura e caratterizzazione dei punti di chiusura. Chiusura e distanza. Interno e frontiera. Punti di accumulazione e punti isolati. Derivato. Sottoinsiemi densi. Limite di una successione in uno spazio metrico. Punti di chiusura e punti di accumulazione tramite le successioni. Definizione di spazio topologico. Spazi di Hausdorff. Base per una topologia. Topologia indotta su un sottoinsieme. Definizione di funzione continua (in un punto e in tutto il dominio). Caratterizzazione della continuità di una funzione tra spazi metrici, con gli ε, δ e con le successioni. Composizione di funzioni continue. Fatti importanti. Caratterizzazione della continuità con gli aperti e i chiusi. Corollario del teorema 29, insiemi definiti da disuguaglianze fra funzioni continue. Incollamento a pezzi. Omeomorfismi. Esercizio importante sulla metrica definita da una funzione **dal terzo compitino per casa**. La retta estesa. Compattificazione con un punto di $\mathbb{R}$ e di $\mathbb{R}^2$. L'insieme di coincidenza di due funzioni continue a valori in uno spazio di Hausdorff è un insieme chiuso. Prodotto di due spazi topologici. Limiti per componenti. Proprietà delle proiezioni. Componenti di una funzione a valori in un prodotto e proprietà di continuità. Grafici di funzioni continue a valori in uno spazio di Hausdorff.

9. Continuità, connessione, compattezza, completezza

Capitolo 12. Operazioni con funzioni continue e permanenza del segno **12.2 con dominio uno spazio topologico qualsiasi**. Limiti di composizioni **12.3.1**. Il metodo 12.3.4. Una funzione monotona che ha immagine un intervallo è continua **12.9.1**.

Dispensa sugli spazi connessi. Chiusaperti. Definizione di spazio connesso. Connessione di un sottospazio. Le funzioni continue mandano connessi in connessi. Sottospazi connessi della retta reale. Teorema di tutti i valori e teorema degli zeri **anche 12.8.2**. I convessi di $\mathbb{R}^2$ sono connessi. Esercizi importanti. Omeomorfismi di intervalli **12.10.6 del testo, semplificando la dimostrazione con il fatto che il triangolo T è convesso.**

Spazi compatti, dispensa *Completezza e compattezza*. Definizione di spazio sequenzialmente compatto. Invarianza per sottospazi chiusi. Negli spazi metrici i sottospazi sequenzialmente compatti sono chiusi e limitati. Un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ è sequenzialmente compatto se e solo se è chiuso e limitato. Conseguenze su $\mathbb{R}$. Un prodotto di due spazi sequenzialmente compatti è sequenzialmente compatto. L'immagine di un sequenzialmente compatto tramite una funzione continua è sequenzialmente compatto. Teorema di Weierstrass. Una biiezione continua con dominio un sequenzialmente compatto ha inversa continua.

§12.17: estremanti locali. Definizione di punto di massimo locale e di punto di minimo locale **12.17.1**. Esempi **12.17.2,12.17.3,12.17.4,12.17.5**. Teorema di Rolle, versione topologica **12.18.4**

Funzioni uniformemente continue, dispensa *Completezza e compattezza*. Definizione. La funzione x^2 non è uniformemente continua. Una funzione continua fra spazi metrici con dominio un sequenzialmente compatto è uniformemente continua.

Completezza, dispensa *Completezza e compattezza*. Definizione di successione di Cauchy. Ogni successione convergente è di Cauchy. Le metriche d_1, d_2, d_∞ hanno le stesse successioni di Cauchy. Definizione di spazio metrico completo. Sequenzialmente compatto implica completo. Un prodotto di due spazi metrici completi è completo nella metrica prodotto. Convergenza delle successioni di Cauchy. Completezza e chiusura. Completezza di $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n$.

§19.10: massimo e minimo limite. Definizione, esempi e proposizione fondamentale **fino a 19.10.6 compreso**.