Teoria delle Funzioni 1

Ripasso ed esercizi – Parte 3

Esercizio 1. Se H è un sottospazio lineare chiuso di uno spazio di Hilbert X, dimostrare che $H = (H^{\perp})^{\perp}$.

Esercizio 2. Sia H un sottospazio lineare chiuso di uno spazio di Hilbert X e sia $M = x_0 + H$ la varietà lineare chiusa parallela ad H passante per x_0. Dimostrare che per ogni $x \in X$ esiste unico $x_M \in M$ tale che $(x - x_M) \in H^{\perp}$, e che tale x_M è l'unico elemento di M a distanza minima da x.

Esercizio 3. Sia X uno spazio di Banach di dimensione infinita. Osservare che ogni sottospazio di dimensione finita è chiuso.

a) Dimostrare che ogni sottospazio lineare chiuso e proprio è nowhere dense.

b) Dimostrare che X non ammette una base di Hamel numerabile.

Esercizio 4. Sia $Y = \mathcal{C}[0, \pi]$ e sia:

$$X = \{x \in Y : \; x', x'' \in Y, \; x(0) = x(\pi) = 0\}$$

Studiare il problema di esistenza e unicità per l'operatore $Ax = y$ definito da:

$$-x''(s) + \lambda x(s) = y(s)$$

ove λ è un parametro complesso (cfr. [T], ex. 3, §1.5).

Esercizio 5. Sia $1 < p < \infty$. Sapendo che L^p è riflessivo, dimostrare che $(L^p)'$ è congruente a L^q, ove q è l'esponente coniugato di p, tramite un'isometria lineare (cfr. [L], teorema 11, cap. 8).

Esercizio 6. Dimostrare che $\mathcal{C}[-1, 1]$, con la norma del massimo modulo, non è riflessivo (cfr. [L], teorema 12, cap. 8).

Esercizio 7. (Le funzioni sono reali.) Sia $g \in L^2(0, 2\pi)$ tale che $\int_0^{2\pi} g^2(t)\, dt = 1$ e inoltre $\int_0^{2\pi} g(t) \cos t\, dt = \int_0^{2\pi} g(t) \sin t\, dt = 0$.
Determinare, se esiste, max $\int_0^{2\pi} g(t) \sin^2 t\, dt$.

Esercizio 8. Sia $1 \leq p < \infty$. Assumendo che $\mathcal{C}_c(a, b)$ è denso in $L^p(a, b)$, dedurre che le funzioni caratteristiche degli intervalli compatti contenuti in (a, b) generano una varietà lineare densa in $L^p(a, b)$.
Usare questo fatto per dimostrare che $L^p(a, b)$ è separabile.

Esercizio 9. Sia $p \geq 1$. Dimostrare che gli spazi l^p sono completi.

Esercizio 10. Sia (a, b) un intervallo limitato della retta reale e sia $x \in L^\infty(a, b)$.
Osservare che $x \in L^p(a, b)$ per ogni $p \geq 1$.
Dimostrare che:

$$\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$$

Esercizio 11. Sia $BV[a, b]$ lo spazio delle funzioni reali a variazione limitata definite su $[a, b]$. Sia $V(x)$ la variazione totale della funzione $x(t)$ per $a \leq t \leq b$. Dimostrare che la posizione:

$$\|x\| = |x(a)| + V(x)$$

definisce una norma su $BV[a, b]$ e che lo spazio normato che ne risulta è completo.

Esercizio 12.

- a) Sia $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-c)^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza maggiore di r e somma $f(z)$ e sia $M(r) = \max_{|z-c|=r} |f(z)|$. Dimostrare la formula di Gutzmer:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(c+re^{i\vartheta})|^2 \, d\vartheta \leq (M(r))^2$$

Sugg.: la funzione $\vartheta \mapsto f(c+re^{i\vartheta})$ sta in $L^2(0,2\pi)$.

b) Usare la formula di Gutzmer per dimostrare il teorema di Liouville:

> se la serie di potenze converge per ogni $z \in \mathbb{C}$ ed esiste $M > 0$ tale che $|f(z)| < M$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, allora $f(z) = f(c)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

c) Usare ancora la formula di Gutzmer per dimostrare che una funzione olomorfa su un aperto connesso non può avere punti di massimo o di minimo locale a meno che non sia costante.

Esercizio 13. Spiegare come il teorema di Hahn-Banach può essere usato per dimostrare un teorema di esistenza per la funzione di Green nel problema di Dirichlet.

Esercizio 14. Spiegare come il metodo delle proiezioni ortogonali permette di individuare la soluzione armonica del problema di Dirichlet cercando una funzione di norma minima per un determinato prodotto scalare.

Esercizio 15. Sia X uno spazio vettoriale topologico localmente convesso. Un sottoinsieme di X (contenente lo 0) si dice *barile* se è chiuso, bilanciato, convesso e assorbente.
Sia X lo spazio di tutte le funzioni reali continue su $[0,1]$ munito della norma L^1. Sia:

$$B = \{x \in X : \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| \leq 1\}$$

Dimostrare che B è barile in X (è chiuso in X, non in L^1), ma non è un intorno di 0. Dedurre che X è *magro*, cioè di prima categoria.

Esercizio 16. Sia J l'immersione canonica di uno spazio normato X nel suo biconiugato X''. Spiegare come funziona J e dimostrare che J è un'isometria sulla propria immagine.
Dimostrare inoltre che X è completo se e solo se l'immagine di J è chiusa in X''.

Esercizio 17. Sia X uno spazio di Hilbert e sia $T : X' \to X$, ove $T(x') = y$ significa che y è l'unico elemento per cui $x'(x) = (x, y)$ per ogni $x \in X$. Si dia per scontato che $\|x'\| = \|y\|$.
Mostrare che l'operatore T è coniugato lineare, cioè:

$$T(x' + y') = Tx' + Ty' \quad e \quad T(\alpha x') = \overline{\alpha} Tx'$$

Esercizio 18. Sia X lo spazio delle funzioni reali continue su $[a, b]$, con la topologia della convergenza puntuale. Trovare una rappresentazione del coniugato X'. *(Sugg.: usare il teorema 6.1, cap. III di [TL].)*

Esercizio 19. Costruire una successione $\{f_n\}$ in $\mathcal{C}[0, 1]$ tale che la famiglia di numeri reali $\{f_n(t)\}$ è limitata per ogni t in $[0, 1]$ e tuttavia $\{\|f_n\|\}$ è una successione illimitata.
Spiegare perché tale esempio non è in contraddizione con le conseguenze del teorema di Baire.

Esercizio 20. Supponiamo $1 < p < \infty$. Sia $\{\alpha_k\}$ una successione di scalari con la proprietà che $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k$ è convergente ogniqualvolta $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty$.
Dimostrare che:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^q < \infty$$

dove $q = \frac{p}{p-1}$.

Esercizio 21. Se $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k$ è convergente ogniqualvolta $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| < \infty$, allora $\sup_k |\alpha_k| < \infty$.

Esercizio 22. Se $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k$ è convergente ogniqualvolta $\lim_{k \to \infty} \xi_k = 0$ allora $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < \infty$.

Esercizio 23. Supponiamo $1 \leq p < \infty$. Sia g una funzione misurabile su $\mathbb{R}$; supponiamo che gf sia integrabile ogniqualvolta $f \in L^p(-\infty, +\infty)$. Allora $g \in L^q(-\infty, +\infty)$.

Esercizio 24. Sia X uno spazio di Banach e sia A un sottoinsieme di X che genera una varietà lineare densa in X. Allora una successione $\{x'_n\}$ in X' è debolmente* convergente a qualche $x' \in X'$ se e solo se $\sup_n \|x'_n\| < \infty$ e $\lim_n x'_n(x)$ esiste per ogni $x \in A$. *(Sugg.: imitare la dimostrazione del teorema 10.4, cap. III di [TL].)*

Esercizio 25. Se $x_n = \{\xi_k^{(n)}\} \in l^p$, dove $1 < p < \infty$, allora $\{x_n\}$ è debolmente convergente a $x = \{\xi_k\}$ se e solo se $\sup_n \|x_n\| < \infty$ e inoltre $\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k$ per ogni k. *(Sugg.: usare il teorema 10.4, cap. III di [TL].)*

Esercizio 26. Sia $X = L^p(a,b)$, dove $1 < p < \infty$. Dimostrare che una successione $\{x_n\}$ converge debolmente a x se e solo se $\sup_n \|x_n\| < \infty$ e inoltre $\int_c^d x_n(t)\,dt \to \int_c^d x(t)\,dt$ per ogni intervallo limitato $[c,d]$ contenuto in (a,b). *(Sugg.: oltre al solito 10.4, ricordare che le funzioni caratteristiche degli intervalli compatti generano una varietà lineare densa in $L^p(a,b)$.)*
Dimostrare che per $p = 1$ la condizione non è sufficiente.

Esercizio 27. Sia $X = \mathcal{C}[a,b]$ con la norma del massimo modulo. Una successione $\{x_n\}$ è debolmente convergente a x se e solo se $\sup_n \|x_n\| < \infty$ e inoltre $x_n(t) \to x(t)$ per ogni t. *(Sugg.: ricordare che X' è costituito dagli integrali di Lebesgue-Stieltjes rispetto alle misure di Borel finite su $[a,b]$; tali misure sono associate alle funzioni a variazione limitata.)*

Esercizio 28. Sia H uno spazio di Hilbert con una base numerabile (nel senso che viene generato un sottospazio lineare denso). Sia $x \in H$, con $\|x\| \le 1$. Mostrare che esiste una successione $\{u_n\}$ in H, con $\|u_n\| = 1$ per ogni n tale che $\{u_n\}$ converge debolmente a x.

Esercizio 29. Siano $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ due norme sullo spazio vettoriale X tali che $\|\cdot\|_1 \le \|\cdot\|_2$ e X è completo rispetto a entrambe le norme. Dimostrare che le due norme sono equivalenti. *(Sugg.: usare il principio della mappa aperta.)*

Esercizio 30. Sia X uno spazio lineare munito di due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ che sono compatibili nel senso seguente: se una successione $\{x_n\}$ converge in entrambe le norme, allora i due limiti sono uguali.
Dimostrare che se X è completo rispetto a entrambe le norme, allora le due norme sono equivalenti.

Esercizio 31. Siano X e Y sottospazi chiusi di uno spazio di Banach Z, con $X + Y = Z$ e $X \cap Y = \{0\}$.
Osservare che X e Y sono di Banach.

a) Dimostrare che la somma è diretta, nel senso che per ogni $z \in Z$ esistono unici $x \in X$ e $y \in Y$ tali che $z = x + y$. Chiamiamo tali elementi $\mathrm{pr}_X(z)$ e $\mathrm{pr}_Y(z)$.

b) Consideriamo $X \times Y$ con una norma che induce la topologia prodotto. Dimostrare che l'isomorfismo lineare da $X \times Y$ a Z definito da $(x, y) \mapsto x + y$ è un omeomorfismo.

c) Dimostrare che le proiezioni pr_X e pr_Y sono continue.

Esercizio 32. Siano L^1 e L^2 gli usuali spazi di Lebesgue su un intervallo unitario.
Dimostrare che L^2 è un sottospazio lineare di L^1 e che l'immersione è continua ma non suriettiva.
Dimostrare che L^2 è di prima categoria in L^1 (con la topologia di L^1) in tre modi:

a) mostrare che $\{f : \int |f|^2 \leq n\}$ è un chiuso nowhere dense in L^1.

b) porre $g_n = n\chi_n$, ove χ_n è la funzione caratteristica di $[0, n^{-3}]$, e mostrare che:
$$\int f g_n \to 0$$
per ogni $f \in L^2$ ma non per ogni $f \in L^1$.

c) notare che l'inclusione di L^2 in L^1 è continua ma non suriettiva.

Dedurre un risultato analogo per L^p e L^q, con $p < q$, usando il terzo modo.

BIBLIOGRAFIA

[L] P. Lax, *Functional Analysis,* Wiley-Interscience (2002).

[T] A. E. Taylor, *Introduction to Functional Analysis*, John Wiley&Sons Inc., New York (1964).

[TL] A. Taylor, D. Lay, *Introduction to Functional Analysis*, John Wiley&Sons (1980).