

VETTORI SEMITANGENTI

Umberto Marconi

Dipartimento di Matematica Pura e Applicata – Padova

Prima di leggere il contenuto di queste pagine studiare 4.13 di [DM].

Vogliamo dare la definizione di *vettore semitangente* senza usare le successioni. È un facile esercizio dimostrare che la definizione che daremo è equivalente a quella fornita in 4.13.1 di [DM].

Ricordiamo che il vettore nullo è semitangente per definizione.

Definizione 1 Sia X uno spazio vettoriale normato, sia E un sottoinsieme di X e sia a un punto di accumulazione per E . Un vettore non nullo $v \in X$ si dice *semitangente ad E in a* se è soddisfatta una delle seguenti condizioni equivalenti:

i) esiste $F \subseteq E \setminus \{a\}$ con $a \in F'$ e inoltre:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in F}} \frac{x - a}{|x - a|} = \frac{v}{|v|}$$

ii) esiste $F \subseteq E \setminus \{a\}$ con $a \in F'$ e inoltre per ogni $x \in F$ esiste un numero reale $t_x > 0$ per cui:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in F}} t_x(x - a) = v$$

iii) esiste $H \subseteq X \setminus \{0\}$ con $0 \in H'$ per cui $a + H \subseteq F$ e inoltre:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in H}} \frac{h}{|h|} = \frac{v}{|v|}$$

L'equivalenza della prima e della terza condizione si ottiene con la sostituzione $h = x - a$. Per l'equivalenza con la seconda condizione si veda la dimostrazione di 4.13.2 tralasciando gli indici j .

Ricordiamo che un vettore v si dice *tangente* se v e $-v$ sono entrambi semitangenti; la semiretta semitangente è la semiretta che passa per il punto e ha la direzione orientata del vettore semitangente. Analogamente per la retta tangente.

Proposizione 2 Sia $\gamma(t)$ una curva differenziabile a valori nello spazio normato X e sia γ^* la traccia di γ in X . Sia t_0 un punto per cui $\gamma'(t_0) \neq 0$. Allora il vettore $\gamma'(t_0)$ è tangente a γ^* nel punto $\gamma(t_0)$.

Dimostrazione. Il punto $\gamma(t_0)$ è di accumulazione per γ^* perché essendo $\gamma'(t_0) \neq 0$ esiste un intorno bucato di t_0 su cui $\gamma(t) \neq \gamma(t_0)$ (esercizio). Sia $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ un tale intorno e sia $F = \{\gamma(t) : t \in]t_0, t_0 + \delta[$. Ovviamente F soddisfa le condizioni della definizione (1) e se $t \rightarrow 0^+$ allora $\gamma(t) \in F$. Inoltre:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{|\gamma(t) - \gamma(t_0)|} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}}{\frac{|\gamma(t) - \gamma(t_0)|}{t - t_0}} = \frac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|}$$

perché al denominatore $t - t_0$ si può portare dentro al modulo. Se invece ripetiamo il ragionamento per $t \rightarrow t_0^-$, quando portiamo dentro al modulo $t - t_0$ dobbiamo cambiare il segno e il limite viene $-\frac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|}$. Dunque $\gamma'(t_0)$ e $-\gamma'(t_0)$ sono entrambi vettori semitangenti a γ^* in $\gamma(t_0)$.

Esercizio. Leggere con attenzione 4.14.2, 4.14.3, 4.14.4.

Proposizione 3 Sia $A \subseteq E \subseteq X$ e sia $a \in A$. Se un vettore v è semitangente ad A in a allora v è semitangente ad E in a .

Dimostrazione. Ovvio.

Nel seguente teorema X e Y sono due spazi normati. In $X \times Y$ consideriamo una delle norme equivalenti che inducono la topologia prodotto e precisamente:

$$|(x, y)| = |x| + |y|$$

Teorema 4 Sia $f(x)$ una funzione continua definita su un aperto D dello spazio normato X a valori in uno spazio normato Y . Come al solito $y = f(x)$ è l'equazione del grafico di f . Sia $q = f(p)$ e si supponga che f sia differenziabile in p . Un vettore non nullo $(v, w) \in X \times Y$ è semitangente al grafico di f in (p, q) se e solo se (v, w) appartiene al grafico del differenziale di f in p , cioè soddisfa l'equazione:

$$w = df(p).v$$

Dimostrazione. Poiché f è continua e p è di accumulazione per il dominio di f , il punto $(p, f(p))$ è di accumulazione per il grafico di f .

Necessità. Se (v, w) è un vettore semitangente al grafico di f in $(p, f(p))$, allora esiste un sottoinsieme $H \times K \subseteq X \times Y \setminus (0, 0)$ avente $(0, 0)$ come punto di accumulazione per cui

$$(p + H) \times (q + K) \tag{1}$$

è un sottoinsieme del grafico di f e inoltre:

$$\frac{(h, k)}{|h| + |k|} \longrightarrow \left(\frac{v}{|v| + |w|}, \frac{w}{|v| + |w|} \right) \tag{2}$$

ove la freccia significa il limite fatto per $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ con $(h, k) \in H \times K$. Per ogni tale coppia (h, k) la condizione (1) ci dice che $(p + h, q + k)$ appartiene al grafico di f e dunque $q + k = f(p + h)$ per cui:

$$k = f(p + h) - q = f(p + h) - f(p) = df(p).h + \sigma(h)|h| \tag{3}$$

con $\sigma(h)$ infinitesimo per $h \rightarrow 0$. Poiché $k \rightarrow 0$ per $h \rightarrow 0$, i limiti sono fatti per $h \rightarrow 0$. Da (2) e (3) si ottiene:

$$\frac{h}{|h| + |k|} \longrightarrow \frac{v}{|v| + |w|} \tag{4}$$

e anche

$$\frac{df(p).h + \sigma(h)|h|}{|h| + |k|} \longrightarrow \frac{w}{|v| + |w|}$$

L'ultimo limite si può anche scrivere:

$$df(p) \cdot \frac{h}{|h| + |k|} + \sigma(h) \frac{|h|}{|h| + |k|} \longrightarrow \frac{w}{|v| + |w|}$$

Poiché il secondo addendo è infinitesimo · limitato, si ottiene:

$$df(p) \cdot \frac{h}{|h| + |k|} \longrightarrow \frac{w}{|v| + |w|} \quad (5)$$

Applicando $df(p)$ a (4) e tenendo conto che $df(p)$ è un'applicazione lineare continua otteniamo:

$$df(p) \cdot \frac{h}{|h| + |k|} \longrightarrow \frac{1}{|v| + |w|} df(p) \cdot v \quad (6)$$

Per l'unicità del limite, da (5) e (6) si deduce:

$$\frac{1}{|v| + |w|} df(p) \cdot v = \frac{w}{|v| + |w|}$$

e, semplificando e leggendo a rovescio, si conclude:

$$w = df(p) \cdot v$$

cioè (v, w) appartiene al grafico del differenziale di f in p .

Sufficienza. Sia (v, w) un vettore di $X \times Y$ che soddisfa l'equazione:

$$w = df(p) \cdot v$$

Nello spazio X consideriamo la retta passante per p e percorsa con velocità v :

$$r(t) = p + vt$$

e consideriamo la curva tracciata sul grafico di f che si proietta su questa retta:

$$\gamma(t) = (r(t), f(r(t)))$$

Derivando, tenendo presente la regola della catena otteniamo:

$$\gamma'(t) = \left(\frac{dr}{dt}, df(p + tv) \cdot \frac{dr}{dt} \right) = (v, df(p + tv) \cdot v)$$

da cui, valutando in 0:

$$\gamma'(0) = (v, df(p) \cdot v) = (v, w)$$

Per la prop. (2) il vettore di $X \times Y$ dato da $\gamma'(0) = (v, w)$ è tangente a γ^* in $(p, f(p))$ ed essendo $\gamma^* \subseteq$ grafico di f , dalla prop. (3) si conclude che (v, w) è tangente al grafico di f in $(p, f(p))$.

Osservazione 5 Dalla dimostrazione abbiamo ottenuto che se f è differenziabile allora ogni vettore (v, w) semitangente al grafico di f in $(p, f(p))$ appartiene al grafico del differenziale di f in p , e viceversa che ogni vettore appartenente al grafico di $df(p)$ risulta tangente alla traccia di una curva che percorre il grafico di f . Da ciò si deduce che se f è differenziabile ogni vettore semitangente al grafico è anche tangente.

Osservazione 6 L'equazione, in $(v, w) \in X \times Y$:

$$w = df(p) \cdot v$$

definisce lo spazio vettoriale tangente al grafico di f in $(p, f(p))$. Se trasliamo in $(p, f(p))$, cioè poniamo $w = y - f(p)$ e $v = x - p$ otteniamo l'equazione dello spazio affine tangente al grafico di f in $(p, f(p))$:

$$y - f(p) = df(p) \cdot (x - p)$$

ovvero:

$$y = f(p) + df(p).(x - p)$$

Si osservi che lo spazio affine tangente è il grafico dell'applicazione affine:

$$f(p) + df(p).(x - p)$$

che sappiamo avere in p un contatto di ordine superiore al primo con $f(x)$ poiché:

$$f(x) = (f(p) + df(p).(x - p)) + \sigma(x - p)|x - p|$$

con σ infinitesimo per $x \rightarrow p$.

Se f è scalare e $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ otteniamo l'equazione dell'iperpiano affine tangente al grafico in \mathbb{R}^{n+1} :

$$x_{n+1} - f(p) = \nabla f(p)|(x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)$$

cioè:

$$x_{n+1} - f(p) = \partial_{x_1} f(p)(x_1 - p_1) + \partial_{x_2} f(p)(x_2 - p_2) + \dots + \partial_{x_n} f(p)(x_n - p_n)$$

Il teorema (4) ammette anche un inverso, cioè:

Teorema 7 *Se f è continua e l'insieme $\{(v, w)\}$ dei vettori semitangenti al grafico di f in (p, q) è grafico di una funzione lineare continua da X a Y , cioè è descritto da un'equazione del tipo*

$$w = L.v$$

con $L \in L(X, Y)$, allora f è differenziabile in p .

Dimostrazione. L'ipotesi dice che per ogni vettore $v \in X$ il vettore $(v, L.v)$ è semitangente al grafico di f in $(p, f(p))$. Esistono quindi incrementi (h, k) , che si addensano intorno a 0, con $k = f(p+h) - f(p)$ per cui sussistono i seguenti limiti per $h \rightarrow 0$:

$$\frac{h}{|h| + |k|} \longrightarrow \frac{v}{|v| + |L.v|} \quad (7)$$

$$\frac{k}{|h| + |k|} \longrightarrow \frac{L.v}{|v| + |L.v|} \quad (8)$$

Dalla (7) passando ai moduli si ottiene:

$$\frac{|h|}{|h| + |k|} \longrightarrow \frac{|v|}{|v| + |L.v|} \quad \text{ovvero} \quad \frac{1}{1 + \frac{|k|}{|h|}} \longrightarrow \frac{1}{1 + \frac{|L.v|}{|v|}}$$

Applicando a quest'ultimo l'omeomorfismo inverso di $t \rightarrow \frac{1}{1+t}$ si ottiene:

$$\frac{|k|}{|h|} \longrightarrow \frac{|L.v|}{|v|} \quad (9)$$

La (8) si può anche scrivere:

$$\frac{\frac{k}{|h|}}{1 + \frac{|k|}{|h|}} \longrightarrow \frac{L.v}{|v| + |L.v|}$$

e tenendo conto della (9) si ottiene:

$$\frac{\frac{k}{|h|}}{1 + \frac{|k|}{|h|}} \left(1 + \frac{|k|}{|h|}\right) \longrightarrow \frac{L.v}{|v| + |L.v|} \left(1 + \frac{|L.v|}{|v|}\right) = \frac{L.v}{|v|}$$

ovvero:

$$\frac{k}{|h|} \longrightarrow \frac{L.v}{|v|}$$

cioè:

$$\frac{f(p+h) - f(p)}{|h|} \longrightarrow \frac{L.v}{|v|} \quad (10)$$

Da (7), tenendo conto di (9), si ottiene:

$$\frac{\frac{h}{|h|}}{1 + \frac{|k|}{|h|}} \left(1 + \frac{|k|}{|h|}\right) \longrightarrow \frac{v}{|v| + |L.v|} \frac{|v| + |L.v|}{|v|} = \frac{v}{|v|}$$

cioè:

$$\frac{h}{|h|} \longrightarrow \frac{v}{|v|} \quad (11)$$

Applicando l'applicazione lineare continua L otteniamo:

$$L \cdot \frac{h}{|h|} \longrightarrow L \cdot \frac{v}{|v|} \quad (12)$$

Tenendo conto della (12), dalla (10) si ottiene:

$$\frac{f(p+h) - f(p)}{|h|} - L \cdot \frac{h}{|h|} + L \cdot \frac{h}{|h|} - L \cdot \frac{v}{|v|} \longrightarrow 0$$

ovvero:

$$\frac{f(p+h) - f(p) - L.h}{|h|} + L \cdot \left(\frac{h}{|h|} - \frac{v}{|v|}\right) \longrightarrow 0$$

Per (11) il secondo addendo di questo limite tende a 0 e quindi otteniamo:

$$\frac{f(p+h) - f(p) - L.h}{|h|} \longrightarrow 0$$

Questo dice che f è differenziabile in p e $df(p) = L$.

Aggiungere [DM, 4.16.1].

BIBLIOGRAFIA

[DM] Giuseppe De Marco, *Analisi Due*, Decibel Zanichelli.