SUCCESSIONI DI NUMERI REALI

Complementi ed esercizi

Nello svolgere esercizi su limiti di successioni reali si dà per scontato che le funzioni elementari (potenze, esponenziali, logaritmi, seni e coseni) sono continue in tutti i punti del loro dominio.
Ricordiamo che una funzione f si dice continua in un punto c del dominio se per ogni successione $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di punti del dominio, da $\lim_{n\to\infty} c_n = c$ segue che $\lim_{n\to\infty} f(c_n) = f(c)$.

Esempi.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 2^0 = 1$$

Calcoliamo:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2-3n}{2n+1}\right)^3$$

determinando prima il limite della base:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}-3}{2+\frac{1}{n}} = \frac{0-3}{2+0} = -\frac{3}{2}$$

Pertanto il limite assegnato vale $\left(-\frac{3}{2}\right)^3$.

Esercizio. Trovare le sottosuccessioni convergenti e i loro limiti per la successione:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)\cos\left(\frac{2}{n}\right)$$

Criterio del rapporto e della radice per le successioni.

Sia $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri (strettamente) positivi e si supponga che esista in $\tilde{\mathbb{R}}$ il limite:

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n}$$

Se $l > 1$ la successione diverge a $+\infty$;
se $0 \leq l < 1$ la successione converge a 0.
Dimostrazione. Facciamo solo il caso $l > 1$ ($l < 1$ si può fare passando ai reciproci oppure procedendo analogamente).
Scegliamo un numero α tale che $1 < \alpha < l$. Per definizione di limite esiste un indice $\overline{n}$ tale che $\frac{c_{n+1}}{c_n} > \alpha$ e $\sqrt[n]{c_n} > \alpha$ per ogni $n > \overline{n}$. Per tali indici è $c_{n+1} > \alpha c_n$ e

$$\sqrt[n]{c_n} > \alpha^n = (1+\varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon, \quad \text{ove} \quad \varepsilon = \alpha - 1.$$

Nel caso della radice, applicando il confronto a $c_n \geq 1 + n\varepsilon$ si ottiene che c_n diverge a $+\infty$. Nel caso del rapporto, da $c_{n+1} > \alpha c_n$ si ottiene che la successione c_n è definitivamente crescente; detto l il suo limite, se l fosse un numero passando al limite nella stessa disuguaglianza si otterrebbe $l \geq \alpha l$. Poiché $\alpha > 1$ e $l > 0$ si ottiene una contraddizione.

Esempi. Discutere i limiti delle successioni:

$$a^n, \qquad \frac{a^n}{n^p}, \qquad \frac{a^n}{n!}, \qquad \frac{n!}{n^n}$$

Esercizio. Sia $p > 0$. Dimostrare che:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^p} = 0$$

Soluzione. Dalle disuguaglianze (per $x > 0$) $\log x \leq x - 1 < x$ si ottiene $\log x < x$ e quindi $\log(x^\alpha) < x^\alpha$. Se $\alpha > 0$, dall'ultima disuguaglianza si ottiene $\frac{\log x}{x^\alpha} < \frac{1}{\alpha}$. Sia $\varepsilon < p$; si ottiene:

$$0 \leq \frac{\log n}{n^p} = \frac{1}{n^\varepsilon} \cdot \frac{\log n}{n^{p-\varepsilon}} < \frac{1}{p-\varepsilon} \cdot \frac{1}{n^\varepsilon}$$

Se $\varepsilon > 0$, $n^\varepsilon \to +\infty$, l'ultimo termine tende a 0 e quindi, per i carabinieri, anche $\frac{\log n}{n^p} \to 0$.

Esercizio.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\log n} = e^0 = 1$$

Esercizio. Delle seguenti successioni si dica tutto quello che si può.

$$\begin{array}{cccc}
(-1)^n + n & \frac{a^n}{n} & n^p & \cos n \\
\sin\left(\frac{1}{n}\right) & \frac{n^2-n}{4n^2+1} & \frac{n}{\log_2 n} & \sqrt[n]{n!} \\
\log_{\frac{1}{n}} n & \log_{\frac{1}{2}} n & \left(\frac{2+n}{n}\right)^n & \left(\frac{2+n}{n}\right)^{\sqrt{n}} \\
\left(\frac{n}{4+n}\right)^{n^2} & (-1)^n + \frac{1}{n} & \frac{\log_2 n}{n^p} & \sqrt[7]{n^2+1} - \sqrt[7]{n}
\end{array}$$